Concours Cachan 2013 - Probabilités - Corrigé (Régine Marchand)

1 Une distance entre probabilités

I.1) Soit $h \in \mathcal{H}$; par définition de $\|.\|_{Lip}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |h(x) - h(0)| \leq \|h\|_{Lip}|x|, \text{ et donc } |h(x)| \leq |h(0)| + \|h\|_{Lip}|x|.$$

Soit maintenant $\mu \in \mathcal{M}$. La mesure μ est une mesure de probabilité, donc la constante $|h(0)|$ est intégrable pour μ. Comme de plus, la fonction $x \mapsto x$ est intégrable pour μ par hypothèse, on en déduit que h est intégrable pour μ et que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|d\mu(x) \leq |h(0)| + \|h\|_{Lip} \int_{\mathbb{R}} |x|d\mu(x) < +\infty.$$

I.2) Pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, on définit

$$d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) = \sup_{h \in \mathcal{H}, \|h\|_{Lip} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) \right|.$$

- Soit μ, ν dans $\mathcal{M}$. Soit $h \in \mathcal{H}$, alors h est intégrable par rapport à μ et à ν, donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) \right| < +\infty.$$

De plus, μ et ν étant des probabilités, on a $\int_{\mathbb{R}} h(0)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} h(0)d\nu(x) = h(0)$, et donc

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (h(x) - h(0))d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} (h(x) - h(0))d\nu(x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |h(x) - h(0)|d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} |h(x) - h(0)|d\nu(x) \\ &\leq \|h\|_{Lip} \left(\int_{\mathbb{R}} |x|d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} |x|d\nu(x) \right).\end{aligned}$$

Ainsi, si on suppose de plus $\|h\|_{Lip} \leq 1$, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x|d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} |x|d\nu(x) \right).$$

Le sup de la définition de $d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu)$ porte donc sur une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$, ce qui garantit que $d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+$.

- La propriété de symétrie est évidente : $\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}$, $d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) = d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)$.
- Il est clair que $\forall \mu \in \mathcal{M}$, $d_{\mathcal{W}}(\mu, \mu) = 0$. Réciproquement, soit $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ tels que $d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) = 0$. Soit h une fonction lipschitzienne bornée ; posons $\tilde{h} = h/\|h\|_{Lip}$, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\tilde{h}(x) - \tilde{h}(y)| = \frac{1}{\|h\|_{Lip}}|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{\|h\|_{Lip}}\|h\|_{Lip}|x - y| \leq |x - y|.$$

Donc $\|\tilde{h}\|_{Lip} \leq 1$, et donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) \right| = \|h\|_{Lip} \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(x)d\nu(x) \right| = 0.$$

Cette égalité étant vérifiée pour toutes les fonctions h lipschitziennes bornées, on en déduit que μ et ν ont les mêmes transformées de Fourier, et donc que $\mu = \nu$.

- Soit $\mu, \nu, m \in \mathcal{M}$, et soit $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$. Alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)dm(x)\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x)\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)dm(x)\right|.$$

En prenant le sup sur les $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$ de chaque côté, on obtient l'inégalité triangulaire :

$$d_{\mathcal{W}}(\mu, m) \leq d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) + d_{\mathcal{W}}(\nu, m).$$

Donc $d_{\mathcal{W}}$ est une distance sur $\mathcal{M}$.

I.3) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de marginales respectives μ et ν, avec μ et ν dans $\mathcal{M}$. Le théorème de transfert assure que pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x) = \mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Y).$$

Soit donc $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x)\right| = |\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Y)| \leq \mathbb{E}|h(X) - h(Y)| \leq \mathbb{E}|X - Y|,$$

puisque h est lispschitzienne et $\|h\|_{Lip} \leq 1$. Donc

$$d_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) = \sup_{h \in \mathcal{H}, \|h\|_{Lip} \leq 1} \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\nu(x)\right| \leq \mathbb{E}|X - Y|.$$

I.4) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$; on a $\int_{\mathbb{R}} h(x)d\delta_a(x) = h(a)$, et donc

$$d_{\mathcal{W}}(\delta_a, \delta_b) = \sup_{h \in \mathcal{H}, \|h\|_{Lip} \leq 1} |h(a) - h(b)| \leq |a - b|.$$

Si l'on considère $h : x \mapsto x$, alors $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$ et donc

$$d_{\mathcal{W}}(\delta_a, \delta_b) \geq \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\delta_a(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\delta_b(x)\right| = |h(a) - h(b)| = |a - b|.$$

Finalement, on en déduit que $d_{\mathcal{W}}(\delta_a, \delta_b) = |a - b|$.

I.5) Soit $m, \beta \in \mathbb{R}$, et $s, \alpha > 0$. Rappelons que si $X \sim \mathcal{N}(m, s)$, alors $Y = \alpha X + \beta$ suit encore une loi gaussienne $\mathcal{N}(m', s')$ dont les paramètres $m' \in \mathbb{R}$ et $s' > 0$ sont donnés par :

$$m' = \mathbb{E}Y = \mathbb{E}(\alpha X + \beta) = \alpha\mathbb{E}X + \beta = \alpha m + \beta;$$
$$(s')^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2\mathrm{Var}(X) = \alpha^2 s^2, \text{ et donc } s' = \alpha s.$$

Remarquons que les lois gaussiennes sont dans $\mathcal{M}$ puisqu'elles admettent des moments de tout ordre.

Soit maintenant $a, b \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(a, s)$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si l'on pose $Y = b - a + X$, alors $Y \sim \mathcal{N}(b, s)$. La question **I.3)** assure alors que

$$d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(a, s), \mathcal{N}(b, s)) \leq \mathbb{E}|X - Y| \leq |b - a|.$$

Si l'on considère $h : x \mapsto x$, alors $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathcal{N}(a, s)(x) = \int_{\mathbb{R}} x d\mathcal{N}(a, s)(x) = a;$$

donc $d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(a,s),\mathcal{N}(b,s)) \geq \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathcal{N}(a,s)(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathcal{N}(b,s)\right| \geq |a-b|$.
Finalement, on en déduit que $d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(a,s),\mathcal{N}(b,s)) = |a-b|$.

I.6) Soit $s>0$, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Si l'on pose $Y=sX$ alors $Y\sim\mathcal{N}(0,s)$. La question **I.3)** assure alors que

$$d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(0,1),\mathcal{N}(0,s)) \leq \mathbb{E}|X-Y| \leq \mathbb{E}|(1-s)X| \leq |1-s|.\mathbb{E}|X|.$$

Maintenant,

$$\mathbb{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x\exp(-x^2/2)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

et donc $d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(0,1),\mathcal{N}(0,s)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1-s|$.

Si l'on considère $h: x\mapsto |x|$, alors $h\in\mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip}\leq 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathcal{N}(0,s)(x) = \mathbb{E}|sX| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}s;$$

donc $d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(0,1),\mathcal{N}(0,s)) \geq \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathcal{N}(0,1)(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mathcal{N}(0,s)\right| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}|\,1-s\,|$.
Finalement, on en déduit que $d_{\mathcal{W}}(\mathcal{N}(0,1),\mathcal{N}(0,s)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|\,1-s\,|$.

I.7) Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités dans $\mathcal{M}$ et $\mu\in\mathcal{M}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} d_{\mathcal{W}}(\mu_n,\mu) = 0.$$

Soit h une fonction lipschitzienne bornée et posons $\tilde{h} = h/\|h\|_{Lip}$; nous avons vu dans la question **I.2)** que $\|\tilde{h}\|_{Lip}\leq 1$, et donc, pour $n\geq 0$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x)\right| \leq \|h\|_{Lip}.\left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(x)d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(x)d\mu(x)\right| \leq \|h\|_{Lip}.d_{\mathcal{W}}(\mu_n,\mu).$$

Ainsi, pour toute fonction h lipschitzienne bornée,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x)\right| = 0,$$

et donc $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ.

I.8) Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $d_{\mathcal{W}}$.

- Si l'on considère $h: x\mapsto|x|$, alors $h\in\mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip}\leq 1$ et, pour tous $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} |x|d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} |x|d\mu_m(x)\right| \leq d_{\mathcal{W}}(\mu_n,\mu_m);$$

Ainsi, la suite $(\int_{\mathbb{R}}|x|d\mu_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers une limite que l'on note I.

- Soit $\varepsilon>0$. Il existe N tel que

$$\forall n\geq N \quad \int_{\mathbb{R}} |x|d\mu_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \leq I+1.$$

Soit $M_0 \geq 1$ tel que $(I+1)/M_0 \leq \varepsilon$:

$$\forall n \geq N \quad \mu_n([-M_0, M_0]^c) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x|>M_0} d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{|x|} \mathbf{1}_{|x|>M_0} \right) |x| d\mu_n(x)$$
$$\leq \frac{1}{M_0} \int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_n(x) \leq \frac{I+1}{M_0} \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $n < N$. Par continuité séquentielle décroissante, $\lim\limits_{M \to +\infty} \mu_n([-M, M]^c) = 0$. Donc il existe $M_1 > 0$ tel que

$$\forall n < N \quad \mu_n([-M_1, M_1]^c) \leq \varepsilon.$$

On prend alors $M = \max(M_0, M_1)$, et il vient

$$\forall n \in N \quad \mu_n([-M, M]^c) \leq \varepsilon.$$

La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc tendue, et elle admet donc une sous-suite $(\mu_{\Phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge étroitement vers une mesure de probabilité μ.

• Montrons que $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < +\infty$. Comme la suite $(\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée, soit $A > 0$ un majorant de cette suite. Soit $M > 0$. Posons $h_M : x \mapsto \min(|x|, M)$, alors h_M est clairement bornée par M. De plus,

$$|h(x) - h(y)| \leq \left\{ \begin{array}{rcl} |x-y| & \text{si} & \max(|x|, |y|) \leq M, \\ 0 & \text{si} & \min(|x|, |y|) > M, \\ M - |x| \leq |y| - |x| \leq |y - x| & \text{si} & |y| > M \text{ et } |x| \leq M, \\ M - |y| \leq |x| - |y| \leq |y - x| & \text{si} & |x| > M \text{ et } |y| \leq M. \end{array} \right.$$

Donc h_M est lipschitzienne bornée, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h_M d\mu_{\Phi(n)} = \int_{\mathbb{R}} h_M d\mu.$$

Or pour tout $M > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_M d\mu_{\Phi(n)}(x) \leq \int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_{\Phi(n)}(x) \leq A$. On en déduit donc que

$$\forall M > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} h_M d\mu \leq A.$$

Comme h_M tend simplement en croissant vers $h : x \mapsto |x|$ quand M tend vers $+\infty$, le théorème de convergence monotone assure que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) \leq A,$$

ce qui montre que $\mu \in \mathcal{M}$.

I.9) Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $d_{\mathcal{W}}$. Nous avons vu que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, et que toute limite d'une sous-suite est dans $\mathcal{M}$. Pour montrer que $\mathcal{M}$ est complet pour $d_{\mathcal{W}}$, il ne nous reste donc plus qu'à montrer que toutes les sous-suites convergentes de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une même limite.

Soit donc μ et ν deux limites de deux sous-suites de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notées respectivement $(\mu_{\Phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_{\Psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, et soit h une fonction lipschitzienne bornée :

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h d\mu_{\Phi(n)} \quad et \int_{\mathbb{R}} h d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h d\mu_{\Psi(n)}.$$

De plus, nous avons vu en **I.7)** que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu_{\Phi(n)}(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu_{\Psi(n)}(x) \right| \leq \|h\|_{Lip} . d_{\mathcal{W}}(\mu_{\Phi(n)}, \mu_{\Psi(n)}).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $d_{\mathcal{W}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_n, \mu_m) \leq \varepsilon / \|h\|_{Lip}.$$

Comme Φ et Ψ sont deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,

$\forall n \geq N \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_{\Phi(n)}, \mu_{\Psi(n)}) \leq \varepsilon / \|h\|_{Lip}$ et donc $\left| \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu_{\Phi(n)}(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu_{\Psi(n)}(x) \right| \leq \varepsilon.$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) d\nu(x) \right| \leq \varepsilon, \text{ et ce pour tout } \varepsilon > 0.$$

Ainsi, pour toute fonction h lipschitzienne bornée :

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) d\nu(x),$$

ce qui assure que $\mu = \nu$.

2 Une équation différentielle

II.1) Soit $x > 0$. Avec une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \int_x^{+\infty} \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-y^2/2} dy \\ &\leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq \frac{1}{x} \phi(x). \end{aligned}$$

Soit $x > 0$. En faisant le changement de variable $y = x + z$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(x)}{\phi(x)} &= e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-xz} e^{-z^2/2} dz \\ &\leq \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \leq \sqrt{2\pi} . \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

II.2) On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - x f(x) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Toutes ses solutions sont définies sur $\mathbb{R}$, et l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. On vérifie que $f_0 : x \mapsto \exp(x^2/2)$ est une solution particulière, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f = C f_0$.

II.3) Soit $h \in \mathcal{H}$ et Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

• Comme on l'a dit en **I.5)**, Z admet des moments de tout ordre, donc sa loi $\mathcal{N}(0,1)$ est dans $\mathcal{M}$. La question **I.1)** assure alors que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| d\mathcal{N}(0,1)(x) < +\infty,$$

ce qui, d'après le théorème de transfert, garantit l'intégrabilité de $h(Z)$.

• *Bonne définition de f_h.* On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_h(x) = -e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(h(y) - \mathbb{E}(h(Z)))dy.$$

Comme $h(Z)$ est intégrable, $\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}h(y)dy$ est une intégrale impropre absolument convergente, et donc bien définie quelque soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}dy$ est aussi une intégrale impropre absolument convergente, et donc f_h est bien définie.

La fonction f_h est le produit de la fonction $k_1 : x \mapsto -e^{x^2/2}$, qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $k_2 : x \mapsto \int_x^{+\infty} g(y)dy$, où $g : y \mapsto e^{-y^2/2}(h(y) - \mathbb{E}(h(Z)))$. Comme h est lipschitzienne donc continue, g est continue et l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$ est absolument convergente. Ainsi, $-k_2$ est une primitive de g, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad k_2'(x) = -e^{-x^2/2}(h(x) - \mathbb{E}(h(Z))) = \mathbb{E}(h(Z))e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2}h(x).$$

Comme h est lipschitzienne donc continue, k_2' est continue et f_h est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (par contre, C^2 ca m'a l'air bizarre : par exemple $h(x) = |x|$, on regarde la dérivabilité de k_2' en 0).

• *Montrons que f_h est solution de l'équation différentielle :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}(h(Z)).$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, avec second membre. Soit $x \in \mathbb{R}$; avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
f_h'(x) &= k_1'(x)k_2(x) + k_1(x)k_2'(x) \\
&= -xe^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(h(y) - \mathbb{E}(h(Z)))dy - e^{x^2/2}\left(-e^{-x^2/2}(h(x) - \mathbb{E}(h(Z)))\right) \\
&= -xe^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(h(y) - \mathbb{E}(h(Z)))dy + h(x) - \mathbb{E}(h(Z)) \\
&= xf_h(x) + h(x) - \mathbb{E}(h(Z)).
\end{aligned}$$

La fonction f_h est donc solution de l'équation différentielle.

• *Montrons que f_h est bornée.* Soit $y \in \mathbb{R}$:

$$|h(y) - \mathbb{E}(h(Z))| = |\mathbb{E}(h(y)) - \mathbb{E}(h(Z))| \leq \mathbb{E}|h(y) - h(Z)| \leq \|h\|_{Lip}\mathbb{E}|y - Z| \leq \|h\|_{Lip}(|y| + \mathbb{E}|Z|).$$

On a vu à la question **I.6)** que

$$\mathbb{E}|Z| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \text{ et donc } |h(y) - \mathbb{E}(h(Z))| \leq \|h\|_{Lip}\left(|y| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

Soit maintenant $x > 0$:

$$\begin{aligned}
|f_h(x)| &= \left| e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(h(y) - \mathbb{E}(h(Z)))dy \right| \\
&\leq e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}|h(y) - \mathbb{E}(h(Z))|dy \\
&\leq e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}\|h\|_{Lip}\left(|y| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)dy \\
&\leq \|h\|_{Lip}\left(e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}|y|dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}dy\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, avec la question **II.1)**

$$e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}dy \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Pour le premier terme, on a en faisant le changement de variable $y = x + z$:

$$\begin{aligned}
e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}|y|dy &= \int_0^{+\infty} e^{-xz}e^{-z^2/2}(x+z)dz \\
&\le \int_0^{+\infty} xe^{-xz}dz + \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}zdz \le 1+\sqrt{2\pi}.\frac{1}{2}\mathbb{E}|Z| \le 2.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient $\forall x > 0 \quad |f_h(x)| \le 3$, ce qui est moins fort que la borne annoncée dans l'énoncé.

Soit maintenant $x < 0$:

$$\begin{aligned}
f_h(x) &= -e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(h(y)-\mathbb{E}(h(Z)))dy \\
&= -\sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}(h(y)-\mathbb{E}(h(Z)))dy + e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(h(y)-\mathbb{E}(h(Z)))dy \\
&= e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(h(y)-\mathbb{E}(h(Z)))dy.
\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le théorème de transfert pour calculer $\mathbb{E}(h(Z)))$. En reprenant les calculs faits dans le cas $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
|f_h(x)| = \left|e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(h(y)-\mathbb{E}(h(Z)))dy\right| &\le e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}|h(y)-\mathbb{E}(h(Z))|dy \\
&\le e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\|h\|_{Lip}\left(|y|+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)dy \le e^{x^2/2}\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2/2}\|h\|_{Lip}\left(|y|+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)dy.
\end{aligned}$$

On peut alors reprendre les estimées pour $x > 0$, et on obtient $\forall x < 0 \quad |f_h(x)| \le 3$. Comme f_h est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_h est bornée sur $\mathbb{R}$.

• *Conclusion.* Une solution de l'équation différentielle avec second membre est la somme de la solution particulière f_h, et d'une solution de l'équation différentielle homogène. Nous avons vu à la question **II.1)** la forme des solutions de cette équation différentielle homogène, et la seule solution bornée est la fonction nulle. Ainsi, f_h est l'unique solution bornée de l'équation différentielle avec second membre.

3 Distance à la loi normale

III.1) Soit $f \in \mathcal{F}$ et X une variable aléatoire intégrable. Alors $f(X)$ est bornée, donc $Xf(X)$ est intégrable. De plus, $f'(X)$ est bornée donc intégrable. Ainsi,

$$\mathcal{S}(f,X) = \mathbb{E}(Xf(X) - f'(X)) \text{ est bien définie.}$$

III.2) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $f \in \mathcal{F}$. Soit $M > 0$. Avec une intégration par parties,

$$\int_{-M}^{M} xf(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \left[-f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-M}^{M} + \int_{-M}^{M} f'(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient avec le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Xf(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \mathbb{E}(f'(X)).$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\mathcal{S}(f, Z) = 0$.

III.3) Soit X une variable aléatoire intégrable et Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Avec la question **I.2)** et le théorème de transfert,

$$d_{\mathcal{W}}(\mu_X, \mu_Z) = \sup_{h\in\mathcal{H}, \|h\|_{Lip}\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu_X(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu_Z(x) \right| = \sup_{h\in\mathcal{H}, \|h\|_{Lip}\leq 1} \left|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Z))\right|.$$

Soit $h \in \mathcal{H}$ avec $\|h\|_{Lip} \leq 1$, et soit f_h l'unique solution de l'équation différentielle avec second membre de la partie **II.** Alors, comme X est à valeur dans $\mathbb{R}$,

$$h(X) - \mathbb{E}(h(Z)) = f_h'(X) - Xf_h(X).$$

On peut ensuite prendre l'espérance, et il vient

$$\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Z)) = \mathbb{E}(f_h'(X) - Xf_h(X)) = \mathcal{S}(f_h, X).$$

Les majorations de la partie **II.** assurent que

$$\|f_h'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h\|_{Lip} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{et} \quad \|f_h''\|_\infty \leq 2\|h\|_{Lip} \leq 2.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{W}}(\mu_X, \mu_Z) &= \sup_{h\in\mathcal{H}, \|h\|_{Lip}\leq 1} |\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Z))| = \sup_{h\in\mathcal{H}, \|h\|_{Lip}\leq 1} |\mathcal{S}(f_h, X)| \\ &\leq \sup_{h\in\mathcal{H}, \|h\|_{Lip}\leq 1} \left\{ |\mathcal{S}(f_h, X)| : f_h \in \mathcal{F}, \|f_h'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h\|_{Lip},\ \|f_h''\|_\infty \leq 2\|h\|_{Lip} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ |\mathcal{S}(f, X)| : f \in \mathcal{F}, \|f'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \|f''\|_\infty \leq 2 \right\}. \end{aligned}$$

III.4) Soit X une variable aléatoire intégrable telle que $\mathcal{S}(f, X) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, et soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors, la question **III.3)** assure que $d_{\mathcal{W}}(\mu_X, \mu_Z) = 0$. Comme $d_{\mathcal{W}}$ est une distance, il vient $\mu_X = \mu_Z$, et donc X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

4 Au-delà du TCL

IV.1) Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ des vaiid centrées réduites avec un moment d'ordre 3. La loi forte des grands nombres assure que, presque sûrement et dans L^1,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0.$$

Le théorème central limite assure que

$$\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \leq b \right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

IV.2) Soit $f \in \mathcal{F}$. Posons, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$,

$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y) - f'(y)(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) : \ x \in \mathbb{R}\}$, g est de la même régularité que f, c'est-à-dire C^2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme f est C^2, le développement limité à l'ordre 2 de f en y assure que

$$\lim_{x \to y} g(x,y) = f''(y)/2,$$

Donc en posant, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(y,y) = f''(y)/2$, on prolonge g par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier. On obtient alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(y) = f'(y)(x-y) + (x-y)^2 g(x,y).$$

La formule de Taylor-Lagrange assure de plus que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ avec } x < y \quad \exists z_{x,y} \in]x, y[\quad f(x) - f(y) = f'(y)(x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} f''(z_{x,y}).$$

Ainsi, $g(x,y) = f''(z_{x,y})/2$. Il est donc clair que

$$\|g\|_\infty \leq \|f''\|_\infty / 2.$$

IV.3) Soit $n \geq 1$ fixé. On pose $W = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$, et pour $1 \leq k \leq n$, $W_k = W - \frac{1}{\sqrt{n}} X_k$.

Soit $f \in \mathcal{F}$, et soit g la fonction que nous avons associée à f dans la question **IV.2)**.

$$\mathcal{S}(f, W) = \mathbb{E}(W f(W) - f'(W)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k f(W) - f'(W)\right)$$

Soit $1 \leq k \leq n$. En prenant $y = W_k$ et $x = W$, et donc $x - y = W - W_k = \frac{1}{\sqrt{n}} X_k$, il vient

$$f(W) - f(W_k) = f'(W_k)(W - W_k) + (W - W_k)^2 g(W, W_k)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(f, W) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k f(W_k) + f'(W_k) \frac{1}{\sqrt{n}} X_k (W - W_k) + \frac{1}{\sqrt{n}} X_k (W - W_k)^2 g(W, W_k) - f'(W)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k f(W_k)\right) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k f'(W_k)(W - W_k) - f'(W)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k (W - W_k)^2 g(W, W_k)\right).
\end{aligned}$$

IV.4) Soit $1 \leq k \leq n$. Alors, par construction, X_k et W_k sont indépendants, et donc

$$\mathbb{E}(X_k f(W_k)) = \mathbb{E}(X_k).\mathbb{E}(f(W_k)) = 0$$

puisque X_k est centrée. De même,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(X_k f'(W_k)(W - W_k)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(W_k)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_k^2).\mathbb{E}(f'(W_k)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(f'(W_k))$$

puisque X_k est centrée et réduite. Finalement,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(X_k(W-W_k)^2 g(W,W_k)\right) = \frac{1}{n^{3/2}}\mathbb{E}\left(X_k^3 g(W,W_k)\right).$$

En regroupant tous les termes, on obtient

$$\mathcal{S}(f,W) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(f'(W_k)-f'(W))\right) + \frac{1}{n^{3/2}}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^3 g(W,W_k)\right).$$

IV.5) L'inégalité des accroissements finis assure que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$|f'(W_k)-f'(W)| \leq \|f''\|_\infty.|W_k - W| \leq \|f''\|_\infty \frac{1}{\sqrt{n}}|X_k|;$$

$$\mathbb{E}\left(|f'(W_k)-f'(W)|\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|f''\|_\infty \mathbb{E}|X_1| \quad \text{puisque les } (X_k)_{k\geq 0} \text{ ont tous la même loi};$$

$$\left|\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(f'(W_k)-f'(W))\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(|f'(W_k)-f'(W)|\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|f''\|_\infty \mathbb{E}|X_1|.$$

D'autre part, en utilisant que $\|g\|_\infty \leq \|f''\|_\infty/2$ et que les $(X_k)_{k\geq 0}$ ont tous la même loi

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^{3/2}}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^3 g(W,W_k)\right)\right| &\leq \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|X_k^3 g(W,W_k)\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{n^{3/2}}\frac{\|f''\|_\infty}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|X_k^3\right|\right) \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2\sqrt{n}}\mathbb{E}|X_1^3|.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient $|\mathcal{S}(f,W)| \leq \dfrac{\|f''\|_\infty}{\sqrt{n}}\left(\mathbb{E}|X_1| + \dfrac{1}{2}\mathbb{E}|X_1^3|\right)$.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. A partir de maintenant et afin de garder la dépendance en n, on note, pour $n \geq 1$,

$$W^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Comme W^n est intégrable, la question **III.3)** assure que

$$d_{\mathcal{W}}(\mu_{W^n},\mu_Z) \leq \sup\left\{|\mathcal{S}(f,W^n)| : f\in\mathcal{F}, \|f'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \|f''\|_\infty \leq 2\right\}.$$

Pour $f \in \mathcal{F}$ telle que $\|f''\|_\infty \leq 2$, on a vu à la question précédente que

$$|\mathcal{S}(f,W^n)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{\sqrt{n}}\left(\mathbb{E}|X_1| + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X_1^3|\right) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\mathbb{E}|X_1| + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X_1^3|\right).$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1 \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_{W^n},\mu_Z) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\mathbb{E}|X_1| + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X_1^3|\right).$$

En prenant la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{\mathcal{W}}(\mu_{W^n},\mu_Z) = 0$. La question **I.7)** assure alors que $(\mu_{W^n})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers μ_Z, où encore que $(W^n)_{n\geq 1}$

converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Nous venons donc de démontrer le Théorème Central Limite, pour des vaiid $(X_k)_{k\geq 0}$ centrées réduites avec un moment d'ordre 3. L'avantage est que l'on obtient une vitesse de convergence, puisque l'on contrôle explicitement la distance $d_{\mathcal{W}}(\mu_{W^n}, \mu_Z)$:

$$\forall n \geq 1 \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_{W^n}, \mu_Z) \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\mathbb{E}|X_1| + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X_1^3| \right).$$

On a donc une vitesse de convergence dans le TCL en $1/\sqrt{n}$ (voir le théorème de Berry-Essen).

5 Un jeu de pile ou face

Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ des vaiid de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

V.1) La définition de D_k permet de retrouver la valeur de X_k et X_{k+1} à partir de la valeur de D_k. Soit $k \geq 0$ fixé.

$$D_{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } D_k \in \{1,3\} \text{ et } X_{k+2} = 0, \\ 2 & \text{si } D_k \in \{1,3\} \text{ et } X_{k+2} = 1, \\ 3 & \text{si } D_k \in \{2,4\} \text{ et } X_{k+2} = 0, \\ 4 & \text{si } D_k \in \{2,4\} \text{ et } X_{k+2} = 1. \end{cases}$$

Ainsi, il existe une fonction $f : \{1,2,3,4\} \times \{0,1\} \to \{1,2,3,4\}$ telle que pour tout $k \geq 0$, $D_{k+1} = f(D_k, X_{k+2})$. Comme D_0 est une fonction de (X_0, X_1) et que les $(X_k)_{k\geq 0}$ sont des vaiid, on en déduit que $(D_k)_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène, à valeur dans $\{1,2,3,4\}$, de matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $\mathbb{P}(D_1 = 2 | D_0 = 3) = \mathbb{P}(X_{k+2} = 1) = 1/2$.

V.2) La chaîne de Markov $(D_k)_{k\geq 0}$ est à espace d'état fini, donc elle admet au moins une probabilité invariante. Comme $1 \to 2 \to 3 \to 1$ et $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$, elle est irréductible, donc elle admet une unique probabilité invariante, que l'on note π. Comme la somme des coefficients de chaque colonne fait 1, on voit que le vecteur $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ est un vecteur propre à gauche de M, à coefficients positifs, et dont la somme des coefficients vaut 1. C'est donc l'unique probabilité invariante de M.

V.3) Soit $g : \{1,2,3,4\} \to \{-1,3\}$ définie par $g(1) = 3$ et $g(2) = g(3) = g(4) = -1$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$G^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} g(D_k).$$

Comme $(D_k)_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible à espace d'état fini, elle est récurrente positive. Le théorème ergodique assure que, presque sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(D_k) = \mathbb{E}_\pi(g),$$

où $\mathbb{E}_\pi(g) = (g(1) + g(2) + g(3) + g(4))/4 = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} G^{(n)} = 0.$$

V.4) Soit $k, l \in \mathbb{N}$. Le gain Y_k est une fonction de D_k, qui est elle-même une fonction de X_k et X_{k+1}. Les $(X_k)_{k\geq 0}$ étant indépendants, le théorème des coalitions assure que si $|l-k| \geq 2$, alors D_k et D_l sont indépendantes, et par conséquent, Y_k et Y_l sont indépendantes.

- $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_k) = \operatorname{Var}(Y_k)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_k) &= 3\mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 0) - \mathbb{P}(\{X_k = 0, X_{k+1} = 0\}^c) = 3/4 - 3/4 = 0;\\ \mathbb{E}(Y_k^2) &= 3^2\mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 0) + \mathbb{P}(\{X_k = 0, X_{k+1} = 0\}^c) = 9/4 + 3/4 = 3;\end{aligned}$$

$\operatorname{Cov}(Y_k, Y_k) = 3$.

- si $|l-k| \geq 2$, alors $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_l) = 0$, puisque Y_k et Y_l sont indépendantes.
- si $l = k+1$, alors $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = \mathbb{E}(Y_kY_{k+1}) - \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \mathbb{E}(Y_kY_{k+1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_kY_{k+1}) &= 9\mathbb{P}(Y_k = Y_{k+1} = 3) - 3\mathbb{P}(Y_k = 3, Y_{k+1} = -1) - 3\mathbb{P}(Y_k = -1, Y_{k+1} = 3)\\ &\qquad + \mathbb{P}(Y_k = -1, Y_{k+1} = -1)\\ &= 9\mathbb{P}(X_k = X_{k+1} = X_{k+2} = 0) - 3\mathbb{P}(X_k = X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1)\\ &\qquad - 3\mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(Y_k = -1, Y_{k+1} = -1)\\ &= 9.1/8 - 3.1/8 - 3.1/8 + 5/8 = 1;\end{aligned}$$

$\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = 1$.

V.5) On fixe $n \geq 1$. On pose, ici seulement, $Y_0 = Y_{n+1} = 0$ par commodité.

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 = \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)\\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<n} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = 3n + 2(n-1) = 5n - 2.\\ \mathbb{E}(A) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \left(Y_k\frac{1}{\sigma_n}(Y_{k-1} + Y_k + Y_{k+1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_n}\left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Var}(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<n} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1})\right) = \sigma_n.\end{aligned}$$

V.6) On pose $V = \dfrac{1}{\sigma_n}G^{(n)} = \dfrac{1}{\sigma_n}\displaystyle\sum_{k=1}^n Y_k$. Soit $f \in \mathcal{F}$, et soit g associée à f comme à la question **IV.2)**. On adapte les calculs de la question **IV.3)** :

$$\mathbb{E}\big(Vf(V) - f'(V)\big) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^n Y_kf(V) - f'(V)\right)$$

Soit $1 \leq k \leq n$. En prenant $x = V_k$ et $y = V$, et donc $x - y = V_k - V = -\frac{1}{\sigma_n}(Y_{k-1} + Y_k + Y_{k+1})$, il vient

$$f(V) - f(V_k) = f'(V)(V_k - V) + (V - V_k)^2g(V_k, V)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(Vf(V) - f'(V)\big) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^n Y_kf(V_k) + f'(V)\frac{1}{\sigma_n}Y_k(V - V_k) - \frac{1}{\sigma_n}Y_k(V - V_k)^2g(V_k, V) - f'(V)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Y_kf(V_k)\right) + \mathbb{E}\left(f'(V)\left(\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^n Y_k(V - V_k) - 1\right)\right)\\ &\qquad - \frac{1}{\sigma_n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Y_k(V - V_k)^2g(V_k, V)\right).\end{aligned}$$

Soit $1 \leq k \leq n$. Alors, par construction, Y_k et V_k sont indépendants, et donc

$$\mathbb{E}(Y_k f(V_k)) = \mathbb{E}(Y_k).\mathbb{E}(f(V_k)) = 0$$

puisque Y_k est centrée. Finalement, on obtient

$$\mathcal{S}(f,V) = \mathbb{E}\left(f'(V)\left(\frac{A}{\sigma_n} - 1\right)\right) - \frac{1}{\sigma_n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k (V - V_k)^2 g(V_k, V)\right).$$

V.7) Rappelons que les $|Y_k|$ sont bornés par 3, que si $|l-k| \geq 2$, alors $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l) = 0$, et que

$$A = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} Y_k (Y_{k-1} + Y_k + Y_{k+1})$$

On a donc

$$\mathrm{Var}(A) = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_k(Y_{k-1}+Y_k+Y_{k+1})) + \frac{2}{\sigma_n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(Y_i(Y_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}), Y_j(Y_{j-1}+Y_j+Y_{j+1})).$$

Soit $1 \leq k \leq n$:

$$\mathrm{Var}(Y_k(Y_{k-1}+Y_k+Y_{k+1})) \leq \mathbb{E}(|Y_k|(|Y_{k-1}|+|Y_k|+|Y_{k+1}|))^2 \leq 27^2.$$

Soit $1 \leq i < j \leq n$: si $i+1 < (j-1)-1$, alors $\{Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1}\}$ est indépendante de $\{Y_{j-1}, Y_j, Y_{j+1}\}$ et donc $\mathrm{Cov}(Y_i(Y_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}), Y_j(Y_{j-1}+Y_j+Y_{j+1})) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(Y_i(Y_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}), Y_j(Y_{j-1}+Y_j+Y_{j+1}))\right| \\ &\leq \sum_{1\leq i\leq n}\ \sum_{i<j\leq \min(i+3,n)}|\mathrm{Cov}(Y_i(Y_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}), Y_j(Y_{j-1}+Y_j+Y_{j+1}))|\end{aligned}$$

Or $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)} \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$. Ici, il vient,

$$|\mathrm{Cov}(Y_i(Y_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}), Y_j(Y_{j-1}+Y_j+Y_{j+1}))| \leq 27^2;$$

$$\left|\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(Y_i(Y_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}), Y_j(Y_{j-1}+Y_j+Y_{j+1}))\right| \leq 3n27^2.$$

Finalement,

$$\mathrm{Var}(A) \leq \frac{n}{\sigma_n^2}(27^2 + 6.27^2) = \frac{Cn}{\sigma_n^2}.$$

Reprenons maintenant l'estimée de la question **V.6)** :

$$|\mathcal{S}(f,V)| \leq \left|\mathbb{E}\left(f'(V)\left(\frac{A}{\sigma_n}-1\right)\right)\right| + \left|\frac{1}{\sigma_n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k(V-V_k)^2 g(V_k,V)\right)\right|.$$

On a alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la majoration de la question **V.7)** :

$$\left|\mathbb{E}\left(f'(V)\left(\frac{A}{\sigma_n}-1\right)\right)\right| \leq \sqrt{\mathbb{E}(f'(V)^2)\mathbb{E}\left(\frac{A}{\sigma_n}-1\right)^2} \leq \|f'\|_\infty \frac{1}{\sigma_n}\sqrt{\mathrm{Var}(A)} \leq \frac{C\|f'\|_\infty\sqrt{n}}{\sigma_n^2}.$$

D'autre part, comme $\|g\|_\infty \leq \|f''\|_\infty/2$ et $|Y_k| \leq 3$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sigma_n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Y_k(V-V_k)^2 g(V_k,V)\right)\right| &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{2\sigma_n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(|Y_k|\left(\frac{1}{\sigma_n}(Y_{k-1}+Y_k+Y_{k+1})\right)^2\right)\\ &\leq \frac{3.27^2.n\|f''\|_\infty}{2\sigma_n^3}\end{aligned}$$

Finalement, il existe $C'>0$, indépendant de n, tel que pour tout $f\in\mathcal{F}$,

$$|\mathcal{S}(f,V)| \leq \frac{C'\|f'\|_\infty\sqrt{n}}{\sigma_n^2} + \frac{C'\|f''\|_\infty n}{2\sigma_n^3}.$$

V.8) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. A partir de maintenant et afin de garder la dépendance en n, on note, pour $n\geq 1$,

$$V^n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^n Y_k.$$

Rappelons que l'on a calculé à la question **V.5)** $\sigma_n^2 = 5n-2$. Comme V^n est intégrable, la question **III.3)** assure que

$$d_{\mathcal{W}}(\mu_{V^n},\mu_Z) \leq \sup\left\{|\mathcal{S}(f,V^n)| : f\in\mathcal{F}, \|f'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \|f''\|_\infty \leq 2\right\}.$$

Pour $f\in\mathcal{F}$ telle que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et $\|f''\|_\infty \leq 2$, on a vu à la question précédente que

$$|\mathcal{S}(f,V^n)| \leq \frac{C'\|f'\|_\infty\sqrt{n}}{\sigma_n^2} + \frac{C'\|f''\|_\infty n}{2\sigma_n^3} \leq C'\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{5n-2} + \frac{C'n}{(5n-2)^{3/2}} \leq \frac{C''}{\sqrt{n}},$$

où $C''>0$ est une constante, indépendante de n et f. On en déduit que

$$\forall n\geq 1 \quad d_{\mathcal{W}}(\mu_{V^n},\mu_Z) \leq \frac{C''}{\sqrt{n}}.$$

En prenant la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient $\lim_{n\to+\infty} d_{\mathcal{W}}(\mu_{V^n},\mu_Z)=0$. La question **I.7)** assure alors que $(\mu_{V^n})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers μ_Z, où encore que $(V^n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Nous venons donc de démontrer un Théorème Central Limite, pour des va $(Y_k)_{k\geq 0}$ de même loi, centrées, bornées mais non indépendantes, avec un contrôle explicite de la vitesse de convergence en $1/\sqrt{n}$.