2C3 121

Ecole Normale Supérieure de Cachan

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2013

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Mathématiques générales
Second concours session 2013
ENS Cachan

Dans tout le sujet, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ désigne une suite strictement croissante de réels tels que

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \ldots, \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty. \tag{1}$$

On note

$$\mathcal{E}_\Lambda = \Big\{ [0,1] \ni x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k} \,;\, a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions $x \mapsto x^{\lambda_k}$ sur $[0,1]$. On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}\big([0,1];\mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_{[0,1]}$ définie par

$$\|f\|_{[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Plus généralement, pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on considère les semi-normes $\|\ \|_{[a,b]}$ sur $\mathcal{C}$ données par

$$\|f\|_{[a,b]} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Pour $1 \leqslant r < +\infty$ et I un intervalle, on définit $L^r(I)$ l'ensemble des fonctions mesurables telles que

$$\|f\|_{L^r(I)} := \big(\int_I |f(t)|^r \mathrm{d}t \big)^{1/r} < +\infty.$$

Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier de g par

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \mathrm{e}^{-it\xi} \mathrm{d}t,$$

et on rappelle que $\widehat{g}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 lorsque $\xi \longrightarrow +\infty$ ou $\xi \longrightarrow -\infty$.

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'intégrale le long de γ pour $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, on pourra librement utiliser les résultats suivants :

Théorème 1 (Produit de fonctions holomorphes) : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(z) - 1|$ converge uniformément sur tout compact de Ω, alors $f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ définit un élément de $\mathcal{H}(\Omega)$. De plus, l'ensemble des zéros de f est l'union des zéros des $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Soit $\delta > 0$ et F une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. On dit que F est exponentielle de type $\delta > 0$ et on note $F \in \mathcal{T}^\delta$ s'il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|F(z)| \leqslant c\,\mathrm{e}^{\delta|z|}.$$

On dispose alors du théorème suivant :

Théorème 2 (Paley-Wiener) : Soit $\delta > 0$. Alors $F \in \mathcal{T}^\delta \cap L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $f \in L^2[-\delta, \delta]$ telle que

$$F(z) = \int_{-\delta}^{\delta} f(t)\mathrm{e}^{itz}\mathrm{d}t.$$

De plus, on a $\|F\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2[-\delta,\delta]}$.

On rappelle le théorème de Gram :

Théorème 3 (Gram) : Soit $(F, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $g \in F$. Soit $F_n \subset F$ un sous-espace vectoriel ayant pour base $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Alors la distance d_n de g à F_n est donnée par

$$d_n = \inf\left\{\langle g - p, g - p\rangle^{1/2}, p \in F_n\right\} = \left[\frac{G(f_1, f_2, \ldots, f_n, g)}{G(f_1, f_2, \ldots, f_n)}\right]^{1/2},$$

où G est le déterminant

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \det\left(\langle\, f_i, f_j\,\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant m}\right).$$

On rappelle également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels α_i et β_j avec $\alpha_i + \beta_j \neq 0$

$$\det\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\alpha_i + \beta_j)}.$$

Enfin, on rappelle le théorème d'Ascoli :

Théorème 4 (Ascoli) : Une partie $A \subset \mathcal{C}\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$ est relativement compacte si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) A est équicontinue, *i.e* :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \ \exists\,\alpha > 0,\ \text{ t.q. }\ \forall\, f \in A,\ \ \forall\, x, y \in [a, b]$$
$$|x - y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

et

(ii) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in A$, $\|f\|_{[a,b]} \leqslant C$.

1 Théorème de Müntz dans le cas dense

Dans cette partie on considère Λ comme dans (1) avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k} = +\infty$ et on se propose de montrer que $\mathcal{E}_\Lambda$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la suite de fonctions $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ par $Q_0(x) = x^m$ pour $x \in [0, 1]$ et pour $n \geqslant 1$

$$Q_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n}\int_x^1 Q_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n}\mathrm{d}t, \quad x \in [0, 1].$$

1. Soit $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels telle que pour tout $k \geqslant 1$, $\alpha_k \neq 1$ et $\alpha_k \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$. Montrer que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = +\infty$, alors

$$\prod_{k=1}^{N}(1-\alpha_k) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad N \longrightarrow +\infty.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ il existe $a_{n,k} \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q_n(x) = x^m - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, x^{\lambda_k}.$$

3. Montrer que $\|Q_0\|_{[0,1]} = 1$ et que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\|Q_n\|_{[0,1]} \leqslant \left|1 - \frac{m}{\lambda_n}\right| \|Q_{n-1}\|_{[0,1]}.$$

4. En utilisant la question 1, montrer que $\|Q_n\|_{[0,1]} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

5. Conclure.
Indication : On admettra le théorème de Weierstass d'après lequel les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}$ pour $\| \ \|_{[0,1]}$.

2 Théorème de Müntz dans le cas non dense

On considère Λ satisfaisant (1) et on suppose dans cette partie que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$. On se propose de montrer que $\mathcal{E}_\Lambda$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}$.

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \geqslant -3/2$ on pose

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)^3} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}.$$

Soit $R > 1$. On définit

$$\mathcal{I}_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = -1 + R\mathrm{e}^{i\theta}, \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \right\}$$

et

$$\mathcal{J}_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = -1 + it, t \in [-R, R] \right\}.$$

1. En utilisant le théorème 1, montrer que f est une fonction holomorphe sur $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant -3/2\right\}$.
Montrer que si $\operatorname{Re} z \geqslant -3/2$ est tel que $f(z) = 0$, alors il existe $j \geqslant 1$ tel que $z = \lambda_j$.

2. Montrer que pour tout z avec $\operatorname{Re} z > -1$, il existe $R_0 > 1$ tel que si $R > R_0$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{I}_R \cup \mathcal{J}_R} \frac{f(z')}{z - z'} \mathrm{d}z',$$

où $\mathcal{I}_R \cup \mathcal{J}_R$ est parcouru dans le sens trigonométrique.

3. Montrer que pour tout $\operatorname{Re} z \geqslant -1$ et tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}\right| \leqslant 1$. En déduire que pour tout $z \in \mathcal{I}_R \cup \mathcal{J}_R$,
$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{|z+2|^3}.$$

4. En utilisant les questions 2 et 3 et en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que pour tout $\operatorname{Re} z > -1$
$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z}\mathrm{d}s.$$

5. Pour $t \in]0,1]$ on définit
$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)\mathrm{e}^{-is\ln t}\mathrm{d}s.$$
   (a) Montrer que F est bien définie.
   (b) Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
   Indication : On interprétera F comme une transformée de Fourier.

6. Montrer que pour tout $\operatorname{Re} z > -1$
$$f(z) = \int_0^1 t^z F(t)\mathrm{d}t.$$

7. (a) Montrer que pour tout $G \in \mathcal{E}_\Lambda$
$$\int_0^1 G(t)F(t)\mathrm{d}t = 0.$$
   (b) En déduire que $F \notin \overline{\mathcal{E}_\Lambda}$ où $\overline{\mathcal{E}_\Lambda}$ désigne l'adhérence de $\mathcal{E}_\Lambda$ dans $\mathcal{C}$ pour $\| \ \|_{[0,1]}$.

3 Description de $\overline{\mathcal{E}_\lambda}$ dans le cas non dense

Dans cette partie on considère Λ comme dans (1) avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$. On suppose de plus que $\lambda_1 \geqslant 1$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \left\{\lambda_{j+1} - \lambda_j\right\} = \delta. \tag{2}$$

On va donner des propriétés des éléments de $\overline{\mathcal{E}_\Lambda}$.

A. Une inégalité de Tchebychev

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème : Pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ ne dépendant que de Λ telle que pour tout $p \in \mathcal{E}_\Lambda$
$$|p(0)| \leqslant C_\eta \|p\|_{[1-\eta,1]}. \tag{3}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions

$$\Phi(k) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ k\leqslant\lambda_j}} \frac{1}{\lambda_j},$$

$$\Psi(k) = \frac{1}{k}\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \lambda_j<k}} 1 = \frac{1}{k}\mathrm{Card}\Big\{j\in\mathbb{N}\ :\ \lambda_j<k\Big\},\quad N(k)=k\Psi(k).$$

1. (a) Montrer que $\Phi(k) \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

   (b) Montrer que $\dfrac{\lambda_n}{n} \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

   Indication : On pourra considérer $\displaystyle\sum_{k=K}^{L}\frac{1}{\lambda_k}$ *pour* $K \leqslant L$ *bien choisis.*

   (c) En déduire que $\Psi(k) \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

2. Soit $n \geqslant 1$. On note $\Lambda_n = (\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$. Soit $\gamma > 0$ tel que $\gamma \neq \lambda_j$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$. Montrer, à l'aide du théorème 3, que la distance d_n dans $L^2[0,1]$ de x^γ à $\mathcal{E}_{\Lambda_n}$ est donnée par

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2\gamma+1}}\prod_{j=0}^{n}\Big|\frac{\gamma-\lambda_j}{\gamma+\lambda_j+1}\Big|.$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}$. On se propose de montrer qu'il existe $\gamma_m > 0$ tel que $\gamma_m \longrightarrow 0$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ vérifiant pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\prod_{\substack{j=0\\ i\neq m}}^{+\infty}\Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big| \geqslant \mathrm{e}^{-\gamma_m\,\lambda_m}. \tag{4}$$

   (a) Montrer que le produit

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{+\infty}\Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big|$$

   est bien défini.

   (b) Vérifier que pour tout $x \in [0,1/2]$ on a $1-x \geqslant \mathrm{e}^{-2x}$. En déduire que

$$\prod_{\substack{j=0\\ \lambda_j\geqslant 3\lambda_m}}^{+\infty}\Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big| \geqslant \mathrm{e}^{-4\Phi(3\lambda_m)\,\lambda_m}.$$

   (c) On rappelle que pour tout $k \geqslant 1$, $k\,! \geqslant \dfrac{k^k}{\mathrm{e}^k}$. Montrer que

$$\prod_{\substack{j=0\\ \lambda_j<\lambda_m}}^{+\infty}\Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big| \geqslant \frac{\delta^m\,m\,!}{(2\lambda_m)^m}.$$

   En déduire que

$$\prod_{\substack{j=0\\ \lambda_j<\lambda_m}}^{+\infty}\Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big| \geqslant \mathrm{e}^{-\mu_m\,\lambda_m},$$

   où $\mu_m \longrightarrow 0$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ que l'on précisera.

(d) De même, montrer que

$$\prod_{\substack{j=0\\ \lambda_m<\lambda_j<3\lambda_m}}^{+\infty} \Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big| \geqslant \frac{\delta^{N(3\lambda_m)-m-1}\,(N(3\lambda_m)-m-1)\,!}{(4\lambda_m)^{N(3\lambda_m)-m-1}},$$

puis déduire que

$$\prod_{\substack{j=0\\ \lambda_m<\lambda_j<3\lambda_m}}^{+\infty} \Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big| \geqslant \mathrm{e}^{-\widetilde{\mu_m}\,\lambda_m},$$

où $\widetilde{\mu_m} \longrightarrow 0$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ que l'on précisera.

(e) Démontrer (4).

4. (a) Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $\Lambda' = \Lambda\backslash\{\lambda_m\}$ et $q \in \mathcal{E}_{\Lambda'}$. En utilisant les questions 2 et 3, montrer que

$$\|x^{\lambda_m} - q(x)\|_{L^2[0,1]} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\lambda_m+1}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{+\infty} \Big|\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j+\lambda_m+1}\Big|,$$

et qu'il existe $\widetilde{\gamma}_m > 0$ avec $\gamma_m \longrightarrow 0$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ tel que

$$\|x^{\lambda_m} - q(x)\|_{L^2[0,1]} \geqslant \mathrm{e}^{-\widetilde{\gamma}_m\,\lambda_m}.$$

(b) Soit $p \in \mathcal{E}_\Lambda$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ tels que $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^{\lambda_j}$. Montrer en utilisant la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ ne dépendant que de $\varepsilon > 0$ et de Λ telle que

$$|a_m| \leqslant C_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_m}\|p\|_{L^2[0,1]} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

Indication : Si $a_m \neq 0$, on pourra écrire $p(x) = a_m(x^{\lambda_m} - q_m(x))$.

5. Soit $p \in \mathcal{E}_\Lambda$. Comme $\lambda_1 \geqslant 1$, p est dérivable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$ ne dépendant que de $\varepsilon > 0$ et de Λ telle que

$$\|p'\|_{[0,1-\varepsilon]} \leqslant \widetilde{C}_\varepsilon \|p\|_{L^2[0,1]} \leqslant \widetilde{C}_\varepsilon \|p\|_{[0,1]}.$$

6. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_\Lambda$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{C}$ telle que $p_n \longrightarrow f$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ pour $\|\ \|_{[0,1]}$.
On écrit

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j^{(n)} x^{\lambda_j},$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $a_j^{(n)}$ sont des réels tels que $a_j^{(n)} = 0$ pour $j \geqslant k_n$.

(a) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $a_j \in \mathbb{R}$ telle que

$$a_j^{(n)} \longrightarrow a_j \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Indication : On pourra montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(a_j^{(n)})_n$ est une suite de Cauchy.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in [0, 1-\varepsilon]$ on définit $g(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\, x^{\lambda_j}$.

i. Montrer que g est bien définie.

ii. Montrer qu'il existe $R_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $K \in \mathbb{N}$

$$\|p_n - g\|_{[0,1-\varepsilon]} \leqslant \sum_{j=0}^{K} |a_j - a_j^{(n)}| + R_\varepsilon \sum_{j=K+1}^{+\infty} (1-\varepsilon^2)^{\lambda_j}.$$

iii. En déduire que pour tout $0 \leqslant x < 1$, $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\, x^{\lambda_j}$.

iv. Montrer que f se prolonge en une fonction analytique sur l'ensemble

$$\Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] : |z| < 1 \Big\}.$$

7. Dans cette question, on se propose de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ ne dépendant que de Λ telle que pour tout $p \in \mathcal{E}_\Lambda$

$$\|p\|_{[0,1]} \leqslant C_\eta \|p\|_{[1-\eta,1]}, \tag{5}$$

ce qui entraîne (3).

(a) Montrer que si (5) est fausse, il existe $\eta > 0$ et une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_\Lambda$ telle que

$$\|p_n\|_{[1-\eta,1]} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

et $\|p_n\|_{[0,1-\eta]} = \|p_n\|_{[0,1]} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer à l'aide de la question 5 et du théorème 4 qu'il existe $p \in \mathcal{C}([0, 1-\eta/2]; \mathbb{R})$ telle que $p_n \longrightarrow p$ pour $\| \ \|_{[0,1-\eta/2]}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Montrer que $p(x) = 0$ pour tout $x \in [1-\eta, 1-\eta/2]$.

(c) Conclure en utilisant la question 6(b)iv.

(d) Montrer que l'inégalité (5) n'est pas vraie dans le cas où $\mathcal{E}_\Lambda$ est dense dans $\mathcal{C}$.

B. Estimation de la constante

Dans cette partie, on donne une preuve alternative de (3) qui a l'avantage de préciser la constante C_η, et qui ne nécessite pas l'hypothèse (2).

On considère une suite Λ vérifiant (1) telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$.

On note

$$\mathcal{G}_\Lambda = \Big\{ \mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^{-\lambda_k t}\ ; a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

et pour $P \in \mathcal{G}_\Lambda$ on définit

$$P(\infty) = \lim_{t \to +\infty} P(t).$$

Soit $0 < \delta < 1$. On fixe $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \leqslant \frac{\delta}{24},$$

et on définit $A = \dfrac{\delta}{3N}$ et $\sigma_k = A\lambda_k$. Enfin on considère

$$F(z) = \frac{\sin(\delta z/3)}{\delta z/3}\left[\prod_{k=1}^{N}\Big(\big(1-\frac{z}{i\lambda_k}\big)\frac{\sin(Az)}{Az}\Big)\right]\left[\prod_{k=N+1}^{+\infty}\Big(1-\Big(\frac{\sin(z/\lambda_k)}{\sin i}\Big)^4\Big)\right].$$

1. Soit $G \in \mathcal{T}^\delta \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $G(0) = 1$ et $G(i\lambda_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. Soit $g \in L^2[-\delta, \delta]$ donné par le théorème de Paley-Wiener.
   (a) Montrer que pour tout $P \in \mathcal{G}_\Lambda$
   $$P(\infty) = \int_{-\delta}^{\delta} g(t)P(t)\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que
   $$|P(\infty)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|G\|_{L^2(\mathbb{R})}\|P\|_{L^2[-\delta,\delta]}. \tag{6}$$
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a les inégalités
   $$|\sin(z)| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} \quad \text{et} \quad |\sin(z)| \leqslant |z|\mathrm{e}^{|z|}. \tag{7}$$
3. Montrer que F est une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$.
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$
   $$1 + \left|\frac{\sin z}{\sin i}\right|^4 \leqslant \mathrm{e}^{8|z|}.$$
5. En utilisant la question précédente et les inégalités (7), montrer que $F \in \mathcal{T}^\delta$.
6. Vérifier que $F(0) = 1$ et que $F(i\lambda_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.
7. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Λ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$
   $$|F(t)| \leqslant \left|\frac{\sin(\delta t/3)}{\delta t/3}\right|\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{1}{\sigma_k}\Big) \leqslant \left|\frac{\sin(\delta t/3)}{\delta t/3}\right|\mathrm{e}^{CN/\delta}.$$
8. Montrer, à l'aide de (6) qu'il existe une constante universelle $c > 0$ tel que pour tout $P \in \mathcal{G}_\Lambda$
   $$|P(\infty)| \leqslant c\|P\|_{[-\delta,\delta]}\,\mathrm{e}^{CN/\delta}. \tag{8}$$
9. Soit $p \in \mathcal{E}_\Lambda$. Pour $x \geqslant 0$, on pose $q(x) = p(\mathrm{e}^{-\delta}x)$.
   (a) Montrer $q \in \mathcal{E}_\Lambda$.
   (b) Déduire de (8) que
   $$|q(0)| \leqslant c\mathrm{e}^{CN/\delta}\sup_{x\in[\mathrm{e}^{-\delta},\mathrm{e}^{\delta}]}|q(x)|,$$
   puis que
   $$|p(0)| \leqslant c\mathrm{e}^{CN/\delta}\sup_{x\in[\mathrm{e}^{-2\delta},1]}|p(x)|.$$
10. Retrouver (3) en précisant la constante C_η en fonction de N et $\eta > 0$.

Fin de l'épreuve.