ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
RAPPORT DU JURY

1. Ce qu'il y avait dans le sujet

Le sujet proposé aux candidats était composé de deux parties totalement indépendantes, mais qui toutes deux abordaient des thèmes liés à l'analyse harmonique.

I. La première partie menait les candidats à une démonstration "élémentaire" d'un théorème originellement dû à Norbert Wiener et qui s'énonce comme suit.

Théorème. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique qui ne s'annule pas et dont la série de Fourier converge absolument en tout point, alors la série de Fourier de la fonction $\frac{1}{f}$ converge absolument en tout point.*

L'histoire de ce théorème est plus riche et intéressante que cet énoncé ne le laisse peut-être deviner. La démonstration originelle qu'en a donné Wiener en 1932 est longue et difficile. Dix ans plus tard, en partie motivé par ce théorème, Israël Gelfand a initié l'étude abstraite des algèbres de Banach et a utilisé ses premiers résultats pour en donner une démonstration beaucoup plus simple.

La première observation structurelle importante est que l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier converge absolument, traditionnellement noté $\mathcal{A}$, est non seulement un espace vectoriel, mais aussi une algèbre, pour la multiplication ordinaire des fonctions.

En effet, il faut tout d'abord remarquer que la série de Fourier d'une fonction continue converge absolument en tout point si et seulement si la suite des coefficients de Fourier de cette fonction est sommable. La partie "si" de cette assertion provient du fait qu'une série de fonctions normalement convergente est absolument convergente en tout point, et la partie "seulement si" découle de l'observation que l'absolue convergence en 0 d'une série de Fourier entraîne sa convergence normale. Ensuite, il faut observer que la suite des coefficients de Fourier du produit ponctuel de deux fonctions continues est le produit de convolution des suites des coefficients de Fourier de ces deux fonctions, et que le produit de convolution de deux suites sommables est encore une suite sommable.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc une sous-algèbre de l'algèbre $C^0_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques. Le théorème de Wiener peut donc être reformulé comme suit.

Théorème. *Si un élément de l'algèbre $\mathcal{A}$ est inversible dans l'algèbre $C^0_{2\pi}$, alors son inverse appartient à $\mathcal{A}$.*

Ainsi formulé, le théorème pourrait sembler tautologique, mais c'est loin d'être le cas. Étant donné une algèbre C et une sous-algèbre $A \subset C$, il peut très bien arriver que A contienne des éléments inversibles dans C sans contenir leurs inverses. Pour illustrer ce phénomène, considérons l'algèbre $C = \mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients complexes, et sa sous-algèbre $A = \mathbb{C}[X]$ formée par les polynômes. L'algèbre C est un corps et tout élément de A non nul est inversible dans C. Néanmoins, l'inverse d'un polynôme non constant n'appartient pas à A. Ainsi, X est élément de A, inversible dans C, mais $\frac{1}{X}$ n'appartient pas à A.

Pour démontrer le théorème de Wiener, il faut donc comprendre pourquoi ce phénomène ne se produit pas pour l'inclusion d'algèbres $\mathcal{A} \subset C^0_{2\pi}$. La réponse donnée par Gelfand repose sur le fait que l'algèbre $\mathcal{A}$ est à la fois une algèbre complexe avec unité et un espace de Banach, ces deux structures étant compatibles : on dit que c'est une algèbre de Banach.

Pour comprendre cette structure, le plus simple est de remarquer que $\mathcal{A}$, en tant qu'algèbre, est isomorphe à l'algèbre $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ des suites sommables doublement infinies munies du produit de convolution. L'isomorphisme est donné par la transformation de Fourier. Plus précisément, il y a deux isomorphismes inverses l'un de l'autre:

$$\mathscr{F} : \mathcal{A} \to \ell^1(\mathbb{Z}) \text{ et } \mathsf{G} : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathcal{A},$$

donnés respectivement par

$$\mathscr{F}(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\, dt\right)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{et } \mathsf{G}\left((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \left(t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}\right).$$

L'application G est un cas particulier d'une application que Gelfand a définie dans un cadre plus général, et qu'on appelle maintenant la transformation de Gelfand.

L'algèbre $\ell^1(\mathbb{Z})$ est munie d'une norme naturelle, qui est la norme ℓ^1, définie par $\|a\|_{\ell^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$, et cette norme en fait un espace complet, c'est-à-dire un espace de Banach. De plus, le produit est continu et de norme 1, c'est-à-dire que pour tous a et b dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, on a l'inégalité

$$\|a * b\|_{\ell^1} \leqslant \|a\|_{\ell^1}\|b\|_{\ell^1}.$$

On dit qu'on a affaire à une algèbre de Banach[1]. Par transport de structure, on en déduit une structure d'algèbre de Banach sur $\mathcal{A}$ en posant

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|.$$

[1]Une algèbre de Banach est un espace vectoriel complexe B muni d'une norme $\|\cdot\|$ qui en fait un espace complet, et d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre avec une unité 1 telle que $\|1\| = 1$ et pour tous $a, b \in B$ on ait $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$.

Remarquons qu'on aurait pu songer à considérer la norme du supremum $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{A}$ et il est en effet vrai que pour toutes fonctions continues f et g on a $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\|g\|_\infty$. Cependant, l'espace vectoriel normé $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet. En effet, d'une part $\mathcal{A}$ est une partie dense de $(C^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$, car $\mathcal{A}$ contient tous les polynômes trigonométriques, et d'autre part, $\mathcal{A}$ n'est pas égal à $(C^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. Ce dernier point peut être démontré abstraitement en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus : on montre qu'il existe une, et en fait énormément, de fonctions continues dont la série de Fourier diverge en 0. Cette preuve n'est cependant pas constructive. La question 6 du sujet est consacrée à la preuve du fait que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sin nt}{n \log n}$ converge vers une fonction de t qui appartient à $C^0_{2\pi}$ mais pas à $\mathcal{A}$.

Nous avons donc deux algèbres de Banach isomorphes $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^1})$ et $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. Nous pouvons reformuler une deuxième fois le théorème de Wiener.

Théorème. *Un élément de l'algèbre $\ell^1(\mathbb{Z})$ est inversible si et seulement si son image par G est une fonction qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

Nous avons à vrai dire ajouté au théorème de Wiener une assertion, qui est la suivante : si un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$ est inversible, alors son image par G ne s'annule pas, mais ceci découle immédiatement du fait que l'image par un morphisme d'algèbres d'un élément inversible est inversible.

La démonstration de Gelfand consiste à étudier les caractères de l'algèbre de Banach $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$, c'est-à-dire les morphismes d'algèbre continus $\chi : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$. Plus précisément, cette démonstration repose sur les deux assertions suivantes :

1. Si $(B, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach et si $a \in B$ est un élément qui n'est pas inversible, alors il existe un caractère $\chi : B \to \mathbb{C}$ de B tel que $\chi(a) = 0$.
2. Si $\chi : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ est un caractère, alors il existe un réel x tel que pour tout $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ on ait $\chi(a) = \mathsf{G}(a)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$.

La première de ces deux assertions est une conséquence du théorème de Gelfand-Mazur, qui affirme qu'une algèbre de Banach dans laquelle tout élément autre que 0 est inversible est isomorphe à $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. La deuxième est une conséquence du fait que tout caractère d'une algèbre de Banach a, en tant qu'opérateur linéaire, une norme égale à 1.

Ces deux assertions admises, il est très facile de démontrer la troisième forme que nous avons donnée du théorème de Wiener, par contraposition.

La démonstration qui est proposée dans le sujet n'est pas celle de Gelfand, mais une démonstration plus élémentaire, qui n'utilise pas la théorie des algèbres de Banach, et qui est due à Donald Newman.

Pour finir cette introduction, notons que le théorème de Wiener permet de démontrer aisément le résultat suivant, qui était l'une des formes de son résultat qui intéressaient plus particulièrement Wiener. La démonstration de ce théorème est laissée à la réflexion des lecteurs interessés.

Théorème. *Soit a un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. L'ensemble des éléments de $\ell^1(\mathbb{Z})$ obtenus par translation de a engendrent un sous-espace vectoriel dense de $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^1})$.

2. La fonction $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

II. Nous serons plus brefs sur la deuxième partie du sujet, qui est consacrée à l'étude de la transformation de Segal-Bargmann sur $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une transformation intégrale dont l'étude trouve son origine dans l'étude mathématique de la mécanique quantique.

La transformation opère sur l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure gaussienne μ_t de variance t sur $\mathbb{R}$, où $t > 0$ est un paramètre fixé, et qui dans le sujet est pris égal à $\frac{1}{2}$. Étant donné une fonction f de $L^2(\mathbb{R}, \mu_t)$, on calcule son image en la convolant avec la densité de μ_t par rapport à la mesure de Lebesgue. On considère donc la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}}\, dx,$$

tout d'abord comme fonction de la variable réelle z. Il s'avère que cette fonction est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction entière sur $\mathbb{C}$, donnée par la même formule, où z est maintenant vu comme une variable complexe. C'est cette fonction entière qui est l'image de f par la transformation de Segal-Bargmann, et qu'on note $\mathsf{S}(f)$.

Considérons maintenant la mesure ν_t sur $\mathbb{C}$ sous laquelle la partie réelle et la partie imaginaire sont indépendantes, gaussiennes et de variance $\frac{t}{2}$. La propriété fondamentale de la transformation de Segal-Bargmann est d'être une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}, \mu_t)$ sur le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{C}, \nu_t)$ formé des fonctions qui sont entières, et que nous noterons ici $HL^2(\mathbb{C}, \nu_t)$. De plus, la transformation unitaire

$$\mathsf{S} : L^2(\mathbb{R}, \mu_t) \xrightarrow{\sim} HL^2(\mathbb{C}, \nu_t)$$

échange d'une part les opérateurs ∂_x et ∂_z, et d'autre part les opérateurs $x - t\partial_x$ et z, au sens où pour toute fonction f de classe C^∞ à support compact, on a les égalités

$$\mathsf{S}(\partial_x f) = \partial_z \mathsf{S}(f) \text{ et } \mathsf{S}(xf - t\partial_x f) = z\mathsf{S}(f).$$

Ces deux paires d'opérateurs satisfont les relations de commutation canoniques

$$[\partial_x, x - t\partial_x] = [\partial_z, z] = \mathrm{Id},$$

dont la transformation de Segal-Bargmann entrelace donc deux représentations. C'est la raison pour laquelle la transformée de Segal-Bargmann a été initialement introduite et étudiée. Néanmoins, dans le sujet, c'est un autre aspect de la transformée qui est étudié.

En composant la transformation de Segal-Bargmann avec la multiplication, notée M, par la fonction $x \mapsto \sqrt[4]{2\pi t}\; e^{\frac{x^2}{4t}}$, qui est la racine carrée de l'inverse de la densité de la mesure μ_t par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathbb{R}}$, on obtient une isométrie

$$\mathsf{S} \circ \mathsf{M} : L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, \mu_t).$$

Le sujet mène les candidats à une démonstration du fait que, conjuguée par cette isométrie, la transformée de Fourier, notée F, sur $L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$ devient la rotation d'un quart de tour dans le plan complexe, définie pour toute fonction entière A par $\mathsf{Q}A(z) = A(-iz)$. Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}) \arrow[r, "\mathsf{M}"] \arrow[d, "\mathsf{F}"'] & L^2(\mathbb{R}, \mu_t) \arrow[r, "\mathsf{S}"] & HL^2(\mathbb{C}, \nu_t) \arrow[d, "\mathsf{Q}"] \\ L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}) \arrow[r, "\mathsf{M}"] & L^2(\mathbb{R}, \mu_t) \arrow[r, "\mathsf{S}"] & HL^2(\mathbb{C}, \nu_t) \end{tikzcd} .$$

De ceci on déduit immédiatement, par exemple, que la transformation de Fourier est d'ordre 4, au sens où F^4 est l'identité. Ceci permet également de déterminer les espaces propres de la transformation de Fourier pour les ses valeurs propres i^k, où k appartient à $\{0, 1, 2, 3\}$. Ce sont les images réciproques des sous-espaces vectoriels de $HL^2(\mathbb{C}, \nu_t)$ engendrés par $\{z \mapsto z^{4n+k} : n \geqslant 0\}$. Ces images réciproques sont engendrées par des fonctions de Hermite comme celles qui apparaissent à la question **12.** e.

2. Ce qu'en ont fait les candidats

Soixante-cinq candidats ont traité ce sujet et presque tous ont montré qu'ils s'étaient bien préparés à cette épreuve. Nous passons ici, question par question, le sujet en revue et signalons les erreurs qui ont été le plus fréquemment commises.

1. a. Pour montrer qu'une série de terme général $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge absolument, il ne suffit pas de montrer que la suite

$$\left(\left| \sum_{n=-N}^{N} x_n \right| \right)_{N \geqslant 0}$$

est bornée, comme le montre l'exemple de $x_n = (-1)^n$. Il faut par contre montrer que la suite

$$\left(\sum_{n=-N}^{N} |x_n| \right)_{N \geqslant 0}$$

est bornée. On peut aussi montrer que l'élément $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$ de $[0, +\infty]$, qui est bien défini comme somme d'une série à termes positifs, n'est pas égal à $+\infty$. C'est si fondamental qu'il n'est peut-être pas inutile de le redire : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, l'expression $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$ est bien définie, et c'est soit un réel positif, soit $+\infty$. En revanche, l'expression $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ n'a pas toujours un sens, mais elle en a un si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$ n'est pas $+\infty$.

Par inattention, certains écrivent

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\right| \leqslant \ldots < +\infty, \text{ donc la série de terme général } (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ converge absolument.}$$

Mais on ne peut démontrer la convergence d'une série en commençant par considérer la valeur absolue de sa somme, dont on ne sait pas si elle existe.

Les questions **1.** b. et **1.** c. ont en général été bien traitées.

2. a. Certains ont affirmé que la série qui définit $\mathsf{G}(a)(t)$ convergeait absolument parce que a appartient à ℓ^1, ce qui est juste, et continué en en déduisant qu'elle était convergente, *parce que* ℓ^1 *est complet*. Il est vrai que $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ est complet, mais la raison pour laquelle une série absolument convergente de nombre complexes est convergente est que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet.

Pour montrer que la fonction $\mathsf{G}(a)$ était continue, et pour calculer ses coefficients de Fourier, on pouvait utiliser la convergence normale ou le théorème de convergence dominée, et les deux arguments ont été utilisés.

2. b. Cette question était très simple, et pour y répondre il suffisait de dire que les coefficients de Fourier de la fonction nulle sont nuls, mais pour justifier ce fait, certains ont invoqué l'égalité de Parseval, alors qu'il suffit d'écrire

$$\int_0^{2\pi} 0\, dt = 0.$$

2. c. C'est la première question que beaucoup de candidats n'ont pas traitée, ou pas de façon satisfaisante. Il fallait savoir, *et dans ce cas énoncer très clairement*, ou démontrer, comme le propose le corrigé, que la série de Fourier d'une fonction C^1 (ou continue et C^1 par morceaux) converge normalement, ou absolument en tout point, ce qui revient au même, puisque la convergence absolue en 0 s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty,$$

et entraîne la convergence normale.

Insistons à cette occasion sur le fait qu'il est rarement suffisant de désigner un théorème par un nom propre. Théorème de Dirichlet, théorème de Riemann, théorème de Riemann-Lebesgue : ces invocations ne suffisent pas toujours à convaincre le correcteur que le candidat sait exactement de quoi il parle, car la façon d'attribuer un résultat à un mathématicien varie d'un lieu et d'une époque à l'autre. La meilleure solution pour éviter toute ambiguïté est de rappeler l'énoncé du théorème qu'on utilise, ce qui si l'énoncé est bien compris peut souvent se faire en une phrase.

La rédaction suivante, assez représentative de ce qu'on trouve dans les copies, laissera dans le meilleur des cas un doute dans l'esprit du correcteur :

Soit $f \in C^1_{2\pi}$
Par le théorème de Dirichlet, on a que

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

$(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1$
donc $f \in \mathrm{Im}\, \mathsf{G}$

Quel théorème de Dirichlet ? Il y a un théorème de convergence ponctuelle pour les fonctions C^1 par morceaux, mais ce n'est pas celui qu'il faudrait utiliser ici. Quelles propriétés de f utilise-t-on ? Sa continuité ? Sa dérivabilité ? La convergence a-t-elle lieu pour tout t ? Est-ce une convergence absolue ? Normale ? L'assertion $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1$ est-elle une des conclusions du théorème ou une conséquence de la convergence écrite au-dessus ? Comment en déduit-on que f appartient à l'image de G ? Et pour finir, pourquoi dire *on a que* qui n'est pas du français correct, plutôt que *on a* qui a l'avantage d'être correct et plus court, ou *on a l'égalité* qui a l'avantage d'être plus explicite ?

3. a. Cette question a été bien traitée.
3. b. Le sens de l'indication (ou plutôt, comme l'a écrit un(e) candidat(e), de la contre-indication) était de décourager l'usage de l'égalité $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Un(e) candidat(e) a proposé la jolie solution suivante :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{2^k}{2^{2k}} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$

3. c. Cette question était difficile, sans doute une des plus difficiles du problème, surtout si l'on n'avait pas traité la question **2.** c. en guise d'échauffement. Elle a été très peu abordée.

4. a,b,c. Ces questions ont été bien traitées dans l'ensemble, y compris la question **4.** c., qui demandait pourtant de combiner plusieurs résultats antérieurs.
4. d. Cette question, qui nécessitait un peu de calcul, a été moins bien traitée.

5. a. Le raisonnement suivant :

Pour tout réel t, on a $|\mathsf{G}(\mathrm{a})(\mathrm{t})|{>}0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $|\mathsf{G}(a)(t)| \geqslant \alpha$ pour tout t.

contient une erreur grave qu'il ne doit pas y avoir besoin de souligner.
5. b. Certains candidats ont essayé d'approcher uniformément la fonction $\mathsf{G}(a)$ par une fonction de classe C^1, ce qui était possible, et d'en déduire que la suite des coefficients

de Fourier de cette fonction était proche de a en norme ℓ^1. Certains ont voulu pour cela utiliser le théorème de l'application ouverte, qui affirme qu'une application continue et surjective entre deux espaces de Banach est une application ouverte (c'est-à-dire que l'image directe d'une partie ouverte par cette application est une partie ouverte). Mais ce théorème ne s'applique pas ici, car l'application G n'est pas surjective, comme le montre la question **6**.
5. c,d. Ces deux questions, pourtant un peu délicates, ont été bien traitées par une proportion significative de candidats.

À ce point du sujet, on avait terminé la démonstration du théorème de Wiener. En dépit du fait que ce ne soit pas la fonction première d'un sujet de concours, le jury a été satisfait de constater que plusieurs candidat(e)s avaient réussi à l'établir dans son intégralité.

À part la question **6.** a., la question **6** a été largement ignorée par les candidats. Elle nécessitait en effet des calculs assez lourds, et la résoudre nécessitait d'y consacrer du temps, sans doute plus que n'en disposaient les candidats.

7. a. La seule chose à démontrer ici était que tous les polynômes sont de carré intégrable par rapport à la mesure μ. Face à une telle question, certains candidats (peu, heureusement) se contentent d'affirmer que c'est vrai “par domination de l'exponentielle”. Puisqu'il n'y a que cela à démontrer, autant le faire correctement, avec un argument de comparaison.

Par ailleurs, plusieurs candidats ont voulu démontrer l'existence pour tout entier n de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$ en faisant une chaîne d'intégrations par parties. Ceci rejoint le problème que nous avions mentionné à la question **1.** a. : on ne peut démontrer qu'une intégrale existe en commençant par la considérer comme si elle existait, en lui appliquant des transformations et en constatant qu'on arrive à un objet qui a un sens.
7. b. Certains candidats ont cherché à montrer l'existence de D^* sans le calculer, ce qui les a gêné pour les questions suivantes. En outre, plusieurs ont invoqué l'argument suivant, qui est erroné :

Pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, l'application $P \mapsto \langle D(P), Q\rangle_{\mathcal{H}}$ est une forme linéaire continue, donc elle se représente par un unique élément de $\mathbb{R}[X]$, qui dépend linéairement de Q et qu'on note $D^*(Q)$.

En effet, le théorème de représentation de Riesz s'applique uniquement sur un espace complet, or on ne sait pas si $(\mathbb{R}[X], \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ est complet, ou plutôt : on sait qu'il ne l'est pas, par une application classique du théorème de Baire qui montre qu'un espace préhilbertien de dimension algébrique dénombrable n'est jamais complet. Le théorème de Riesz permet donc de représenter la forme linéaire ci-dessus par un élément $D^*(Q)$ de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, mais dont rien n'assure à priori que ce soit un polynôme.

Pour se convaincre qu'il y a là un problème bien réel, on pourra reprendre cette question en remplaçant la mesure μ par la mesure

$$\tilde{\mu}(dx) = e^{-|x|^{\frac{3}{2}}}\ dx.$$

Les polynômes sont toujours de carré intégrable par rapport à cette mesure, mais l'adjoint de l'opérateur D, fourni par le théorème de Riesz, fait intervenir une multiplication par $\sqrt{|x|}$ et ne préserve pas l'espace des polynômes.

7. c,d. Ces questions ont été bien traitées.

8. a. Cette question a été bien traitée.

8. b. Un grand nombre de candidats a obtenu la bonne relation de récurrence, mais n'a pas réussi à la résoudre, même de façon élémentaire sous forme de produit. Sans doute la forme des expressions se prêtait-elle particulièrement bien aux erreurs de calcul.

8. c. La plupart des candidats qui ont abordé cette question en ont éludé la difficulté. Quelques candidat(e)s cependant ont donné le bon argument de domination.

8. d,e. Ces questions ont été assez bien traitées.

Les question **9**, **10** et **11** ont été très peu abordées, et la question **12** pas du tout.

En conclusion, l'impression du jury a été que face à ce sujet pourtant assez long et composé de deux parties très différentes, les candidats avaient dans l'ensemble fait preuve d'une bonne préparation et d'une maîtrise satisfaisante des notions au programme. Les erreurs qui sont soulignées ci-dessus ne doivent pas faire oublier que beaucoup de candidats ont très bien traité une grande partie des questions qu'ils ont abordées.