Rapport sur l'épreuve d'analyse numérique – ENS Cachan 3A 2012

Partie I – Projection sur les convexes fermés

La partie I contenait des questions de cours de niveau master sur la démonstration du théorème de projection sur les convexes fermés, et la caractérisation angulaire de la projection. Cette partie était destinée à mettre en confiance les candidats, et à leur faire manipuler la notion de convexité, dans un cadre familier, pour les préparer à la suite. Elle servait aussi à établir les résultats utilisés constamment dans tout le reste du sujet. Notez qu'ainsi aucun prérequis particulier n'était nécessaire pour traiter ce sujet.

Sauf pour quelques exceptions, cette partie a été bien traitée, et généralement les candidats ont récupéré une bonne partie des points à gagner. Néanmoins un quart des candidats a passé trop de temps sur cette partie, ce qui les a pénalisé pour la suite du sujet.

Partie II – Algorithme de projections alternées

La partie II, correspondant au coeur du sujet, portait sur l'algorithme des projections alternées. Cet algorithme simple a trouvé (parfois dans des versions corrigées ou accelérées...) de nombreuses applications en imagerie, et dans les sciences de l'ingénieur en général. Par exemple, il a été utilisé par Godfrey Hounsfield prix Nobel de médecine en 1979 et inventeur de l'IRM.

L'algorithme des projections alternées a été étudié Von Neumann [8] dans le cas de sous-espaces affines. L'étude de cette partie considère cet algorithme dans le cas convexe, s'inspirant librement de [3]. L'objectif était de démontrer que la suite générée par l'algorithme converge avec une vitesse linéaire vers un point de l'intersection. Notons que la constante κ contrôlant le taux de convergence a une interprétation géométrique comme le « conditionnement » du problème de faisabilité convexe. Notons aussi que ces résultats s'étendent (localement) au cas non-convexe, voir [7].

J'ai été agréablement surpris de voir que la majorité des étudiants ont réussi (plus ou moins bien) à faire la question 4, la plus difficile. La question 5 était plus facile, demandant simplement de développer les produits scalaires avec soin. Pour la question 6, un grand nombre d'étudiants ont reconnu un raisonnement proche du théorème des segments emboités (ou même l'invoquent directement, ce qui n'était pas nécessaire). Les détails de la question 7 n'ont pas été traités avec soin. Plus généralement, dans cette partie comme dans le reste du sujet d'ailleurs, peu d'étudiants ont illustré leur raisonnements par des petits dessins, ce qui aurait pu les aider.

Partie III – Cônes convexes : décomposition, exemples

La partie III se décomposait en une question démontrant « la décomposition de Moreau » suivie de trois applications. Les quatre questions étaient indépendantes, portaient sur notions différentes (convexité, polyèdres, algèbre linéaire, analyse des fonctions d'une variable réelle), et demandaient peu de prérequis. La difficulté de cette partie était probablement de sauter d'un domaine à l'autre. Un certain nombre de choses simples ont été peu ou mal traités.

- **Polaire et décomposition de Moreau.** La question portait sur la décomposition de Moreau, qui généralise, aux cônes convexes, la décomposition d'un point sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires (voir par exemple [1], [5] ou [4]). Plus facile que le reste, elle a été bien traitée dans l'ensemble. Le souci était que certains étudiants n'ont pas assimilé le résultat et donc n'ont pas su l'appliquer dans la suite.
- **Cônes polyédriques.** Cette question démontre que « l'alternative de Farkas », classique en optimisation linéaire, est un corollaire de la décomposition de Moreau (notre référence : [5]). Aucune copie n'a su montrer le résultat.

- **Cône des matrices (semidéfinies) positives.** Cette question, inspirée d'une partie de [6] et d'un exercice de [1], consistait à appliquer la décomposition de Moreau au cône des matrices (semidéfinies) positives. Cette question était l'occasion de juger les candidats sur de l'algèbre matricielle. Étonnement, elle a peu été traitée. Quasiment personne n'a su faire un dessin correct du cône en dimension 2 (question 10c).
- **Décomposition sur les « champs de gradient » des fonctions convexes** . Cette question reprend, en dimension 1, un résultat de [2] (question 11g). Des rappels préliminaires sur les fonctions convexes étaient nécessaires (question 11a-d). Cette question a peu été traitée (c'est normal en fin d'énoncé), mais lorsque ce fut le cas, elle fut assez bien traitée (les candidats avaient probablement noté que les premières sous-questions étaient des questions de cours).

Quelques statistiques

- 34 copies
- moyenne 11.7, écart-type 4.7
- meilleure note 18.5, 4 notes $\geqslant$18
- note la plus basse 2.25, 4 notes $\leqslant$ 4
- 2/3 des notes sont supérieure à 10

Références

[1] V. Beck, J. Malick, and G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K Éditions, 2004.

[2] Guillaume Carlier and Thomas Lachand-Robert. Representation of the polar cone of convex functions and applications. *J. Convex Anal.*, 15(3) :535–546, 2008.

[3] L. Gubin, B. Polyak, and E. Raik. The method of projections for finding the common point of convex sets. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7 :1–24, 1967.

[4] J.-B. Hiriart-Urruty. *Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle.* Springer-SMAI, 2012.

[5] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis.* Springer Verlag, Heidelberg, 2001.

[6] J.-B. Hiriart-Urruty and J. Malick. A fresh variational-analysis look at the positive semidefinite matrices world. *J. Optimization Theory and Applications*, 153(3) :551–577, 2012.

[7] A. Lewis, D. Luke, and J. Malick. Local linear convergence for alternating and averaged nonconvex projections. *Foundations of Computational Mathematics*, 9 :485–513, 2009.

[8] J. von Neumann. The geometry of orthogonal spaces, functional operators- vol. ii. *Annals of Math. Studies*, 22(1950), This is a reprint of mineographed lecture notes, first distributed in 1933.