

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques 2

Sujet 1 - Probabilités

21 avril 2012

Le sujet portait sur l'étude de polymères dirigés en environnement aléatoire. Ce modèle, introduit en 1988 par Imbrie et Spencer, a été introduit par de nombreux mathématiciens, notamment Bolthausen, Carmona, Comets, Hu, Shiga, Vargas, Yoshida . Un des plus récents, dû à Lacoïn en 2010, établit que les deux paramètres critiques β_c et $\bar{\beta}_c$ sont égaux en dimension 2 (ce qui était connu en dimension 1 depuis un travail de Comets et Vargas en 2006). Le sujet introduit deux notions permettant de comparer le comportement de ce polymère avec celui d'une marche aléatoire simple.

Le sujet était très long. Quelques candidats seulement ont travaillé sur la partie III. Une des meilleures copies n'a traité (mais très bien) que les deux premières.

De nombreuses notions du programme étaient abordées dans le sujet : espérance conditionnelle, transformée de Laplace, dérivation d'une espérance à paramètre, martingales, chaînes de Markov, loi du 0-1...

Les questions I-8 (inégalité FKG), II-2 (convergence d'une martingale) et II-3 ont été les moins bien traitées parmi les questions abordées par la plupart des candidats. En particulier, l'argument "*La martingale est bornée dans L^1 donc elle converge presque sûrement*" a été très souvent utilisé. La confusion a été fréquente également entre "martingale de carré intégrable" et "martingale bornée dans L^2 ". Peu de candidats ont compris que la martingale $(W_n(\beta))_{n \geq 0}$ n'était en général pas uniformément intégrable.

Il y a aussi eu de nombreuses erreurs sur le calcul de la transformée de Laplace de la loi géométrique (question I-4) et une confusion dans la question I-5 où la plupart des candidats se sont contentés de montrer que S_{2n} et $S_n - \tilde{S}_n$ avaient même loi alors qu'il était demandé de montrer ce résultat pour les deux suites de variables aléatoires.

Il ne sera sans doute jamais assez rappelé que l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz ?? porte ce nom en souvenir d'Augustin Louis Cauchy et Hermann Amandus Schwarz non Laurent Schwartz (bien qu'il n'est pas démerité lui non plus, mais plus tard...).