Concours d'entrée à l'ÉNS Cachan 3$^{\text{e}}$ année
Corrigé du sujet de Probabilités 2012

Avril 2012

Partie I : Préliminaires

Marche aléatoire

1. L'ensemble Γ_n est en bijection avec $\{\pm e_i : i = 1, 2, \ldots, d\}^n$. Son cardinal est donc $(2d)^n$. La loi de $S_{0:n}$ est la mesure uniforme sur Γ_n. Par conséquent, pour toute fonction f définie sur Γ_n,

$$\mathbb{E}(f(S_{0:n})) = \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} f(\gamma).$$

2. Pour tout $n \geqslant 0$, $S_{n+1} = f(S_n, U_{n+1})$ avec U_{n+1} et S_n indépendantes et $f(x, y) = x + y$. La suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est donc une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{Z}^d$. D'autre part, pour tout $n \geqslant 0$, S_n est intégrable et

$$\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(U_{n+1}) = S_n$$

car U_n est centrée. La suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est donc une martingale.

3. Dans cette question, ainsi que plusieurs fois dans la suite, on utilise la propriété suivante : si X, Y sont des vecteurs indépendants, alors

$$\mathbb{E}[f(X, Y) | Y = y] = \mathbb{E}[f(X, y)].$$

Puisque $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(S_{0:n}) g(S_{n+1:n+m})) &= \mathbb{E}(f(S_{0:n}) \mathbb{E}(g(S_{n+1:n+m}) | \mathcal{F}_n)) \\ &= \mathbb{E}(f(S_{0:n}) \mathbb{E}(g(S_{n+1:n+m}) | S_n)).\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}(g(S_{n+1:n+m}) | S_n = x) = \mathbb{E}(g(x + S_{1:m})).$$

On a donc

$$\mathbb{E}(f(S_{0:n}) g(S_{n+1:n+m})) = \mathbb{E}(f(S_{0:n}) \tilde{g}(S_n))$$

où $\tilde{g}(x) = \mathbb{E}(g(x + S_{1:m}))$.

4. Pour tout $k \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(N_\infty = k) = (1-\pi_d)\pi_d^{k-1}.$$
Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{E}\Big(e^{tN_\infty}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\pi_d)\pi_d^{k-1}e^{tk} = \begin{cases} \dfrac{(1-\pi_d)e^t}{1-\pi_d e^t} & \text{si } t < -\ln \pi_d, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Notons $D_n = S_n - \tilde{S}_n$. Alors $D_{n+1} - D_n = U_{n+1} - \tilde{U}_{n+1}$ a même loi que $U_{2n+1} - U_{2n+2}$ puisque $-\tilde{U}_k$ et U_k sont indépendantes et de même loi. De plus, les accroissements de $(D_n)_{n\geqslant 0}$ sont indépendants. La suite $(D_n)_{n\geqslant 0}$ a donc même loi que $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$. La loi de I_∞ est donc celle du nombre de retours en 0 pour la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ (puisque les temps de retour sont nécessairement pairs). Par convergence monotone,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(e^{tI_n}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{tN_\infty}\Big).$$

Log-Laplace d'une variable aléatoire

6. Puisque $(1+x^2)e^{tx} \leqslant c(e^{2Tx} + e^{-2Tx})$ pour $t \in [-T, T]$ et c assez grand, on a
$$\Big(t \mapsto \mathbb{E}\Big(e^{t\eta}\Big)\Big)' = \mathbb{E}\Big(\eta e^{t\eta}\Big) \quad \text{et} \quad \Big(t \mapsto \mathbb{E}\Big(e^{t\eta}\Big)\Big)'' = \mathbb{E}\Big(\eta^2 e^{t\eta}\Big).$$
En conséquence,
$$\lambda'(t) = \frac{\mathbb{E}(\eta e^{t\eta})}{\mathbb{E}(e^{t\eta})} \quad \text{et} \quad \lambda''(t) = \frac{\mathbb{E}(\eta^2 e^{t\eta})}{\mathbb{E}(e^{t\eta})} - \left(\frac{\mathbb{E}(\eta e^{t\eta})}{\mathbb{E}(e^{t\eta})}\right)^2.$$
La dérivée seconde de λ est donc la variance de la variable aléatoire η sous la mesure de densité $x \mapsto e^{tx-\lambda(t)}$ par rapport à la loi de η. Puisque η n'est pas constante, cette variance est strictement positive : la fonction λ est donc strictement convexe.

7. (a) $\lambda(t) = t^2/2$.
   (b) $\lambda(t) = \ln(pe^t + (1-p))$.

Inégalité FKG

8. On introduit une copie indépendante X' de X et on écrit :
$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) - \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(f(X)-f(X'))(g(X)-g(X'))] \geqslant 0.$$

9. Pour $k > 1$, on utilise l'hypothèse de récurrence par conditionnement :
$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(f(X), g(X)) &= \mathbb{E}(f(X)g(X)) - \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(X) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)g(X)|X_1) - \mathbb{E}(f(X)|X_1)\mathbb{E}(g(X)|X_1)) \\ &\qquad + \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)|X_1)\mathbb{E}(g(X)|X_1)) - \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(X) \\ &= \mathbb{E}\mathrm{Cov}(f(X), g(X)|X_1) \\ &\qquad + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}(f(X)|X_1), \mathbb{E}(g(X)|X_1)). \end{aligned}$$

Le premier terme est positif grâce à l'hypothèse de récurrence puisqu'à x_1 fixé f et g sont toujours croissantes comme fonctions de $k-1$ variables. Le second l'est aussi puisque $\mathbb{E}(f(X)|X_1)$ et $\mathbb{E}(g(X)|X_1)$ sont encore croissantes (comme fonctions de X_1) et que la propriété est vraie au rang 1.

Propriétés élémentaires du modèle

10. Pour tout $\gamma \in \Gamma_n$, $H_n(\gamma)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{\eta(i,\gamma_i) \,:\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Donc
$$Z_n(\beta) = \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\gamma\in\Gamma_n} e^{\beta H_n(\gamma)},$$
est mesurable pour $\mathcal{G}_n$. C'est vrai également pour $q_n(\beta)$ qui est une fonction continue de $Z_n(\beta)$ et pour $W_n(\beta)$ qui vaut $Z_n(\beta)e^{-n\lambda(\beta)}$.
11. Puisque les variables aléatoires $(\eta(n,x))_{n,x}$ sont indépendantes et de même loi, on a
$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(\gamma)}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta\sum_{i=1}^n \eta(i,\gamma_i)}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta\eta}\Big)^n = e^{n\lambda(\beta)}.$$
De même,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}\Big) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\eta(k,\gamma_k)e^{\beta\sum_{i=1}^n \eta(i,\gamma_i)}\Big)\\ &= n\mathbb{E}\Big(\eta e^{\beta\eta}\Big)\mathbb{E}\Big(e^{\beta\eta}\Big)^{n-1}\\ &= n\lambda'(\beta)e^{n\lambda(\beta)}.\end{aligned}$$
12. Si $f(y_1,y_2,\dots,y_n)$ est de la forme $f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_n(y_n)$ alors
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big((f(\eta(i,\gamma_i))_{1\leqslant i\leqslant n})e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\Big(f_i(\eta(i,\gamma_i)e^{\beta\eta(i,\gamma_i)-\lambda(\beta)}\Big)\\ &= \prod_{i=1}^n \int f_i(y_i)e^{\beta y_i-\lambda(\beta)}Q_\eta(dy_i).\end{aligned}$$
La mesure $\nu_{n,\gamma}$ est donc la mesure de probabilité produit sur $\mathbb{R}^n$ de la mesure de densité $y \mapsto e^{\beta y-\lambda(\beta)}$ rapport à Q_η.

Partie II

Convergence de la fonction de partition normalisée

1. Soit $\beta \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, l'inégalité de Jensen assure que
$$\begin{aligned}W_n(\beta)^p &= \Big[\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})-n\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\Big)\Big]^p\\ &\leqslant \mathbb{E}\Big(e^{\beta p H_n(S_{0:n})-np\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\Big)\end{aligned}$$
On a donc
$$\mathbb{E}(W_n(\beta)^p) \leqslant \mathbb{E}\Big(e^{p\beta H_n(S_{0:n})}\Big)e^{-pn\lambda}.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma_n$, on a, puisque les variables $\eta(\cdot,\cdot)$ sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbb{E}\Big(e^{p\beta H_n(\gamma)}\Big) = \Big[\mathbb{E}\Big(e^{p\beta\eta}\Big)\Big]^n = e^{n\lambda(p\beta)}.$$

La variable aléatoire W_n^p est donc intégrable puisque $\mathbb{E}(W_n(\beta)^p) \leqslant e^{n(\lambda(p\beta)-p\lambda(\beta))}$. Pour $p=1$, la majoration est une égalité (pas besoin de l'inégalité de Jensen) : $\mathbb{E}(W_n(\beta)) = 1$.

2. Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n+1}(\beta)|\mathcal{G}_n) &= \frac{e^{-(n+1)\lambda(\beta)}}{(2d)^{n+1}} \sum_{\gamma\in\Gamma_{n+1}} \mathbb{E}\Big(e^{\beta\sum_{i=1}^{n+1}\eta(i,\gamma_i)}|\mathcal{G}_n\Big) \\
&= \frac{e^{-(n+1)\lambda(\beta)}}{(2d)^{n+1}} \sum_{\gamma\in\Gamma_{n+1}} e^{\beta\sum_{i=1}^{n}\eta(i,\gamma_i)}e^{\lambda(\beta)} \\
&= \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\gamma\in\Gamma_n} e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)} = W_n(\beta).
\end{aligned}$$

La suite $(W_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ est donc une $(\mathcal{G}_n)_n$-martingale. Puisqu'elle est positive, la suite $(W_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ converge donc $\mathbb{P}$-presque sûrement vers une variable aléatoire $W_\infty(\beta)$ à valeurs dans $[0,+\infty]$. De plus, d'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}(W_\infty(\beta)) = \mathbb{E}\Big(\liminf_{n\to\infty} W_n(\beta)\Big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n(\beta)) = 1.$$

3. La propriété de Markov de la marche assure que

$$W_{n+m}(\beta) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})-n\lambda(\beta)} Z_{n,m}^{S_n} e^{-m\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\Big)$$

Ainsi,

$$W_\infty(\beta) = \lim_{m\to\infty} W_{n+m}(\beta) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})-n\lambda(\beta)} \lim_{m\to\infty}\Big(Z_{n,m}^{S_n}e^{-m\lambda(\beta)}\Big)|\mathcal{G}\Big).$$

Puisque $e^{\beta H_n(S_{0:n})-n\lambda(\beta)}$ est strictement positif $\mathbb{P}$-presque sûrement, l'événement

$$\{W_\infty(\beta)=0\} = \Big\{\lim_{m\to\infty}\Big(Z_{n,m}^x e^{-m\lambda(\beta)}\Big) = 0 \ : \ \forall x,\ \mathbb{P}(S_n = x) > 0\Big\}$$

appartient à la tribu $\sigma\Big(\eta(j,x),\ j\geqslant n,\ x\in\mathbb{Z}^d\Big)$. Ceci est vrai pour tout n. Il apppartient donc à la tribu asymptotique.

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \sigma\Big(\eta(j,x),\ j\geqslant n,\ x\in\mathbb{Z}^d\Big).$$

4. D'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, tous les éléments de la tribu asymptotique sont de probabilité 0 ou 1.
5. Puisque $W_n(\beta)$ est d'espérance 1, la suite $(W_n(\beta)^\theta)_{n\geqslant 0}$ est uniformément intégrable car elle est bornée dans $L^{1/\theta}$. De plus, elle converge vers $W_\infty(\beta)^\theta$ presque sûrement. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n(\beta)^\theta) = \mathbb{E}(W_\infty(\beta)^\theta).$$

Cette limite est nulle si et seulement si $W_\infty(\beta)$ est nul presque sûrement.

6. On remarque tout d'abord que
$$\frac{\partial}{\partial\beta}W_n(\beta)=\mathbb{E}\Big((H_n(S_{0:n})-\lambda'(\beta))e^{H_n(S_{0:n})-n\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\Big).$$
On a donc, après dérivation sous l'espérance,
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}(W_n(\beta)^\theta)=\theta\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^{\theta-1}(H_n(S_{0:n})-n\lambda'(\beta))e^{\beta H_n(S_{0:n})-n\lambda(\beta)}\Big).$$

7. On applique l'inégalité FKG à la mesure de probabilité de densité $e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et aux fonctions $W_n(\beta)^{\theta-1}$ et $H_n(\gamma)-n\lambda'(\beta)$ qui sont des fonctions respectivement décroissante et croissante des variables $(\eta(k,x))_{(k,x)\in E_n}$. On obtient ainsi que
$$\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^{\theta-1}(H_n(\gamma)-n\lambda'(\beta))e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big)$$
est inférieur à
$$\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^{\theta-1}e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big)\mathbb{E}\Big((H_n(\gamma)-n\lambda'(\beta))e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big).$$
On utilise alors que
$$\mathbb{E}\Big((H_n(\gamma)-n\lambda'(\beta))e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big)=0$$
pour conclure. La question précédente assure alors que la fonction $\beta\mapsto\mathbb{E}(W_n(\beta)^\theta)$ est décroissante.

8. Par passage à la limite, on obtient que la fonction $\beta\mapsto\mathbb{E}(W_\infty(\beta)^\theta)$ est décroissante. Il existe $\bar\beta_c\in[0,+\infty]$ tel que, $\mathbb{P}$-presque sûrement,
$$\begin{cases}W_\infty(\beta)>0 & \text{si } \beta<\bar\beta_c,\\ W_\infty(\beta)=0 & \text{si } \beta>\bar\beta_c.\end{cases}$$

Borne inférieure sur le paramètre critique

9. Pour tout $\beta\geqslant 0$,
$$\tau'(\beta)=2(\lambda'(2\beta)-\lambda'(\beta))>0$$
puisque λ est strictement convexe : τ est donc strictement croissante.

10. Par indépendance des suites (S_n) et $(\tilde S_n)$, on a
$$\begin{aligned}W_n(\beta)^2&=\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\beta\eta(k,S_k)-\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\right)\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\beta\eta(k,\tilde S_k)-\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\right)\\&=\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\beta(\eta(k,S_k)+\eta(k,\tilde S_k))-2\lambda(\beta)}|\mathcal{G}\right).\end{aligned}$$

11. Prenons l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big(W_n^2\Big) = \mathbb{E}\Bigg[\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{n} e^{\beta(\eta(k,S_k)+\eta(k,\tilde{S}_k))-2\lambda(\beta)}|\mathcal{F},\tilde{\mathcal{F}}\Bigg)\Bigg].$$

Or, pour tout $x, \tilde{x} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta(\eta(k,x)+\eta(k,\tilde{x}))-2\lambda(\beta)}\Big) = \begin{cases} e^{\tau(\beta)} & \text{si } x = \tilde{x}, \\ 1 & \text{si } x \neq \tilde{x}. \end{cases}$$

On a donc

$$\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\tau(\beta)I_n}\Big) \quad \text{où} \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{S_k=\tilde{S}_k\}}.$$

12. Quand n tend vers l'infini, I_n croît vers une limite I_∞ et, par convergence monotone,

$$\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^2\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\Big(e^{\tau(\beta)I_\infty}\Big).$$

D'après la partie I, on a donc

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^2\Big) < \infty \Longleftrightarrow \tau(\beta) < \ln(1/\pi_d).$$

13. Si $\tau(\beta) < \ln(1/\pi_d)$, la martingale $(W_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ est bornée dans L^2. Elle converge donc dans L^2 et $\mathbb{P}$-presque sûrement et sa limite est $W_\infty(\beta)$. En particulier, $\mathbb{E}(W_\infty(\beta)) = \lim_n \mathbb{E}(W_n(\beta)) = 1$ et par suite, $W_\infty(\beta) > 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.
14. La fonction τ est nulle en 0, continue sur $\mathbb{R}_+$. La condition $\tau(\beta) < \ln(1/\pi_d)$ est donc satisfaite pour β assez petit : $\bar{\beta}_c > 0$.
15. Si l'environnement est gaussien, $\tau(\beta) = \beta^2$ et $\tau(\beta) < \ln(1/\pi_d)$ si et seulement si $\beta < \sqrt{\ln(1/\pi_d)}$. On a donc $\bar{\beta}_c \geqslant \sqrt{\ln(1/\pi_d)}$.

Partie III

Existence de la limite de l'énergie libre

1. Soit $\beta \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$. Alors l'inégalité de Jensen assure que

$$u_n(\beta) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(\ln Z_n(\beta)) \leqslant \frac{1}{n}\ln \mathbb{E}(Z_n(\beta)).$$

Puisque $e^{\beta H_n(S_{0:n})}$ est positive, on a

$$\mathbb{E}(Z_n(\beta)) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})}|\mathcal{F}\Big)\Big).$$

Or, pour tout $\gamma \in \Gamma_n$, l'indépendance des variables $(\eta(n,x))_{n,x}$ assure que

$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(\gamma)}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(e^{\beta\eta(k,\gamma_k)}\Big) = e^{n\lambda(\beta)}.$$

Ainsi, $u_n(\beta) \leqslant \lambda(\beta)$.

2. On raisonne conditionnellement à $\mathcal{G}$. On a

$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_{n+m}(S_{0:n+m})}|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})}\mathbb{E}\Big(e^{\beta\sum_{k=1}^m \eta(n+k,S_{n+k})}|\mathcal{F}_n,\mathcal{G}\Big)|\mathcal{G}\Big).$$

La propriété de Markov de la marche aléatoire simple implique que

$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta\sum_{k=1}^m \eta(n+k,S_{n+k})}|\mathcal{F}_n,\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta\sum_{k=1}^m \eta(n+k,S_{n+k})}|S_n,\mathcal{G}\Big)$$

Enfin, la suite $(S_{n+k}-S_n)_{k\geqslant 0}$ est une marche aléatoire simple issue de 0 indépendante de S_n. En particulier, on a

$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta\sum_{k=1}^m \eta(n+k,S_{n+k})}|S_n,\mathcal{G}\Big) = Z_{n,m}^{S_n}$$

et par suite,

$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_{n+m}(S_{0:n+m})}|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})}Z_{n,m}^{S_n}|\mathcal{G}\Big).$$

3. Par définition de $Z_n(\beta)$ et μ_n, on a simplement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})}Z_{n,m}^{S_n}|\mathcal{G}\Big) &= \frac{\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})}Z_{n,m}^{S_n}|\mathcal{G}\Big)}{\mathbb{E}(e^{\beta H_n(S_{0:n})}|\mathcal{G})}Z_n(\beta)\\ &= \mu_n\Big(Z_{n,m}^{S_n}\Big)Z_n(\beta).\end{aligned}$$

Il reste à prendre le logarithme pour conclure que

$$\ln Z_{n+m}(\beta) \geqslant \ln Z_n(\beta) + \ln\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mu_n(S_n=x)Z_{n,m}^x.$$

L'inégalité de Jensen pour la mesure μ_n fournit la conclusion

$$\ln Z_{n+m}(\beta) \geqslant \ln Z_n(\beta) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mu_n(\gamma_n=x)\ln Z_{n,m}^x.$$

4. Les variables aléatoires $(\eta(n,x))_{n,x}$ étant indépendantes et de même loi, les variables aléatoires $Z_{n,m}^x$ et Z_m ont même loi.

5. Il reste à prendre l'espérance. Puisque μ_n est $\mathcal{G}_n$-mesurable et que $Z_{n,m}^x$ est indépendante de $\mathcal{G}_n$, on a tout d'abord,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mu_n(S_n=x)\ln Z_{n,m}^x|\mathcal{G}_n\right) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mu_n(S_n=x)\mathbb{E}\Big(\ln Z_{n,m}^x|\mathcal{G}_n\Big).$$

Puisque $\mathbb{E}\Big(\ln Z_{n,m}^x\Big) = \mathbb{E}(\ln Z_m)$ pour tout $x\in\mathbb{Z}^d$, la suite $(\mathbb{E}(\ln Z_m))_{n\geqslant 1}$ est sur-additive. En conséquence, la suite $(u_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ converge (éventuellement vers $+\infty$). Comme elle est bornée par $\lambda(\beta)$, sa limite est finie.

Monotonie et transition de phase

6. Remarquons que $H_n(\gamma)$ (resp. $Z_n^{-1}(\beta)$) est une fonction croissante (resp. décroissante) des variables $(\eta(i,x))_{(i,x)\in E_n}$. D'autre part, la mesure de densité $e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}$ par rapport à la mesure $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. L'inégalité FKG assure donc
$$\mathbb{E}\left(\frac{H_n(\gamma)}{Z_n(\beta)}e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\right) \leqslant \mathbb{E}\Big(H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big)\mathbb{E}\Big(Z_n(\beta)^{-1}e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big),$$
ce qui n'est rien d'autre que l'inégalité recherchée
$$\mathbb{E}\left(\frac{H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right) \leqslant e^{-n\lambda(\beta)}\mathbb{E}\left(\frac{e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right)\mathbb{E}\Big(H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}\Big).$$

7. La dérivée de la fonction $\beta \mapsto \ln Z_n(\beta)$ est égale à
$$\beta \mapsto \frac{\mathbb{E}\Big(H_n(S_{0:n})e^{\beta H_n(S_{0:n})}|\mathcal{G}\Big)}{Z_n(\beta)} = \frac{\sum_{\gamma\in\Gamma_n} H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}}{\sum_{\gamma\in\Gamma_n} e^{\beta H_n(\gamma)}}.$$
Soit $A>0$. Pour tout $\beta\in[0,A]$,
$$e^{\beta\eta(k,x)} \leqslant e^{A\eta(k,x)} + e^{-A\eta(k,x)}.$$
En conséquence, pour tout $\gamma\in\Gamma_n$,
$$\left|H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |\eta(k,\gamma_k)|\right)\prod_{k=1}^n \left(e^{A\eta(k,\gamma_k)} + e^{-A\eta(k,\gamma_k)}\right).$$
On a donc
$$\mathbb{E}\left(\sup_{\beta\in[0,A]}\left|\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_n(\beta)\right|\right) < +\infty.$$
Par suite, on peut dériver sous l'espérance pour obtenir
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}(\ln Z_n(\beta)) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}\Big(H_n(S_{0:n})e^{\beta H_n(S_{0:n})}|\mathcal{G}\Big)}{Z_n(\beta)}\right).$$

8. En explicitant l'espérance conditionnelle, on a
$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}\Big(H_n(S_{0:n})e^{\beta H_n(S_{0:n})}|\mathcal{G}\Big)}{Z_n(\beta)}\right) = \frac{1}{(2d)^n}\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\mathbb{E}\left(\frac{H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right).$$
D'après les questions précédentes, on obtient alors
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}(\ln Z_n(\beta)) &\leqslant \frac{1}{(2d)^n}\sum_{\gamma\in\Gamma_n} e^{-n\lambda(\beta)}\mathbb{E}\left(\frac{e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right)\mathbb{E}\Big(H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}\Big)\\ &\leqslant n\lambda'(\beta)\mathbb{E}\left(\frac{1}{(2d)^n}\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\frac{e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right)\\ &\leqslant n\lambda'(\beta).\end{aligned}$$
En d'autres termes, $(u_n-\lambda)'(\beta)\leqslant 0$: pour tout $n\geqslant 1$ la fonction $u_n-\lambda$ est décroissante. C'est encore vrai en passant à la limite quand n tend vers l'infini : la fonction $u-\lambda$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

9. Les fonctions u et λ sont toutes les deux nulles en 0. Il existe donc β_c (éventuellement nul ou infini) tel que

$$\begin{cases} u(\beta) = \lambda(\beta) & \text{si } \beta < \beta_c, \\ u(\beta) < \lambda(\beta) & \text{si } \beta > \beta_c. \end{cases}$$

Borne supérieure pour β_c

10. Conditionnellement à $\mathcal{G}$, la fonction $\beta \mapsto nq_n(\beta)$ est la log-Laplace de la variable aléatoire $H_n(S_{0:n})$. La fonction q_n est donc de classe $\mathcal{C}^2$, convexe et nulle en 0.
11. Ces propriétés sont stables par passage à l'espérance et à la limite quand n tend vers l'infini : u est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0. D'après la question précédente, $q_n(\beta)/\beta = (q_n(\beta) - q_n(0))/\beta$, la pente de la corde entre $(0,0)$ et $(\beta, q_n(\beta))$, est croissante puisque q_n est convexe.
12. On dérive pour obtenir

$$\left(\frac{q_n(\beta) + \ln(2d)}{\beta}\right)' = -\frac{1}{\beta^2}(q_n(\beta) + \ln(2d)) + \frac{1}{n\beta}\mu_n(H_n).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h_n(\mu_n) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \frac{e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(2d)^n} \ln\left(\frac{e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(2d)^n}\right) \\ &= \beta\,\mu_n(H_n) - (\ln Z_n + n\ln(2d)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{q_n(\beta) + \ln(2d)}{\beta}\right)' = \frac{1}{n\beta^2} h_n(\mu_n) \leqslant 0.$$

La fonction $\beta \mapsto \beta^{-1}(q_n(\beta) + \ln(2d))$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
13. Prenons l'espérance : la fonction $\beta \mapsto (u_n(\beta) + \ln(2d))/\beta$ est décroissante. Comme de plus $u_n \leqslant \lambda$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u_n(\beta) + \ln(2d)}{\beta} &= \inf_{\alpha\in]0,\beta]} \frac{u_n(\alpha) + \ln(2d)}{\alpha} \\ &\leqslant \inf_{\alpha\in]0,\beta]} \frac{\lambda(\alpha) + \ln(2d)}{\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité recherchée.
14. Puisque λ est strictement convexe, $\beta \mapsto \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (sa dérivée vaut $\beta \mapsto \beta\lambda''(\beta)$). Elle est de plus nulle en 0. L'équation $\beta\lambda'(\beta) = \lambda(\beta) + \ln(2d)$ a donc au plus une solution, qui est strictement positive. La fonction $t \mapsto (\lambda(t) + \ln(2d))/t$ atteint son minimum sur $[0, \beta]$ en β ou au point où sa dérivée s'annule, à savoir en β_1. Donc, pour tout $\beta > \beta_1$,

$$u(\beta) \leqslant \frac{(\lambda(\beta_1) + \ln(2d))}{\beta_1}\beta - \ln(2d).$$

15. Il reste à remarquer que pour $\beta > \beta_1$,

$$\frac{(\lambda(\beta_1) + \ln(2d))}{\beta_1}\beta - \ln(2d) < \lambda(\beta)$$

puisque λ est strictement convexe et qu'il y a égalité en β_1.

16. Si $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = \beta^2/2$, et dans ce cas $\beta_1 = \sqrt{2\ln(2d)}$.
Si $\eta \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$\beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = \frac{p\beta e^\beta}{pe^\beta + 1 - p} - \ln\left(pe^\beta + 1 - p\right) \underset{\beta\to\infty}{\sim} -\ln p.$$

Ainsi, β_1 est fini si et seulement si $2dp < 1$.

17. Si $\beta < \bar{\beta}_c$ alors $\mathbb{P}(W_\infty(\beta) > 0) = 1$ et $\mathbb{E}(W_\infty(\beta)) > 0$. Par suite

$$p(\beta) = u(\beta) - \lambda(\beta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(\ln W_n(\beta)) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}(W_n(\beta)) = 0.$$

En d'autres termes, $\beta < \beta_c$. On a donc $\bar{\beta}_c \leqslant \beta_c$.