# Sujet de probabilités

## Notations

Dans tout le sujet, $d$ est un entier fixé supérieur ou égal à 3 et $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. On appelle chemin sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ issu de 0 et de longueur $n$ tout élément

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^{n+1}$$

tel que $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_{i+1} - \gamma_i \in \{\pm e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$. Notons $\Gamma_n$ l'ensemble de ces chemins.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à la mesure $\mathbb{P}$. Sur cet espace on définit les variables aléatoires suivantes :

$$(U_n)_{n\geqslant 1}, \quad (\tilde{U}_n)_{n\geqslant 1} \quad \text{et} \quad (\eta(n,x))_{n\geqslant 0,\, x\in\mathbb{Z}^d}.$$

Elles sont supposées **toutes indépendantes**. Les variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\tilde{U}_n)_{n\geqslant 1}$ sont de loi uniforme sur l'ensemble $\{\pm e_i : 1 \leqslant i \leqslant d\}$. La tribu engendrée par les variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est notée $\mathcal{F}$. On pose $S_0 = 0$, $\tilde{S}_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ et $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{U}_i$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle de $(S_n)_{n\geqslant 0}$. On associe à la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ ses $n+1$ premiers termes en utilisant la notation suivante :

$$S_{0:n} = (S_0, S_1, \dots, S_n) \in \Gamma_n.$$

Les variables aléatoires $(\eta(n,x))_{n\geqslant 0,\, x\in\mathbb{Z}^d}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, de même loi et non constantes. On note $\eta$ pour $\eta(0,0)$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{t\eta})$ est fini et on définit la fonction $\lambda(\cdot)$ (dite log-Laplace de $\eta$) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \ln \mathbb{E}\left(e^{t\eta}\right). \tag{1}$$

On note respectivement $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_n$ les tribus engendrées par les variables aléatoires $(\eta(i,x))_{i\geqslant 1,\, x\in\mathbb{Z}^d}$ et par les variables aléatoires $(\eta(i,x))_{(i,x)\in E_n}$ où

$$E_n = \{(i, \gamma_i) : 0 \leqslant i \leqslant n,\ \gamma \in \Gamma_n\}.$$

Pour tout $\beta \geqslant 0$, on définit la mesure de probabilité $\mu_n$ sur l'ensemble fini $\Gamma_n$ en posant, pour tout $\gamma \in \Gamma_n$,

$$\mu_n(\gamma) = \frac{1}{Z_n(\beta)} e^{\beta H_n(\gamma)}\, \mathbb{P}(S_{0:n} = \gamma),$$

avec

$$H_n(\gamma) = \sum_{i=1}^n \eta(i, \gamma_i) \quad \text{et} \quad Z_n(\beta) = \mathbb{E}\left(e^{\beta H_n(S_{0:n})} | \mathcal{G}\right).$$

La *fonction de partition normalisée* est définie par

$$W_n(\beta) = \mathbb{E}\left(e^{\beta H_n(S_{0:n}) - n\lambda(\beta)} | \mathcal{G}\right).$$

L'*énergie libre* du système et son espérance sont définies par

$$q_n(\beta) = \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta) \quad \text{et} \quad u_n(\beta) = \mathbb{E}(q_n(\beta)).$$

**Remarque.** Les quantités $Z_n(\beta)$, $q_n(\beta)$, $W_n(\beta)$ et $\mu_n$ sont des variables aléatoires.
**Rappel.** Une suite réelle $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est dite sur-additive si, pour tous $n, m \geqslant 1$,

$$v_{n+m} \geqslant v_n + v_m.$$

Si $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est sur-additive, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = \sup_{m\geqslant 1} \frac{v_m}{m} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

**Organisation du sujet.** Les résultats de la première partie peuvent être utilisés dans la suite. Les parties II et III sont respectivement consacrées aux propriétés asymptotiques des suites $(W_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ et $(u_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ en fonction de $\beta$. Ces deux parties sont essentiellement indépendantes.

# Partie I : Préliminaires

## Marche aléatoire

1. Quel est le cardinal de $\Gamma_n$ ? Quelle est la loi de $S_{0:n}$ sur $\Gamma_n$ ? En déduire que, pour toute fonction $f$ définie sur $\Gamma_n$,
$$\mathbb{E}(f(S_{0:n})) = \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\gamma\in\Gamma_n} f(\gamma).$$
2. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et une martingale sur $\mathbb{Z}^d$.
3. Soient $f$ et $g$ deux fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies respectivement sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^m$. Montrer que
$$\mathbb{E}(f(S_{0:n})g(S_{n+1:n+m})) = \mathbb{E}(f(S_{0:n})\tilde{g}(S_n))$$
où $S_{n+1:n+m} = (S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots, S_{n+m})$ et $\tilde{g}$ est une fonction dont on précisera l'expression.
4. Soit $N_\infty = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}} = \mathrm{Card}\{n \geqslant 0 \,:\, S_n = 0\}$. On admet que la loi de $N_\infty$ est la loi géométrique de paramètre $1-\pi_d$ où la probabilité $\pi_d$ est strictement inférieure à 1 : pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(N_\infty = k) = (1-\pi_d)\pi_d^{k-1}$. Déterminer la transformée de Laplace de $N_\infty$ donnée par $t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{tN_\infty}\right)$. On précisera en particulier l'ensemble sur lequel elle est finie.
5. Soit $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\left\{S_k=\tilde{S}_k\right\}} = \mathrm{Card}\left\{k = 0, 1, \ldots, n \,:\, S_k = \tilde{S}_k\right\}$ le nombre d'intersections des deux suites $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 0}$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_n - \tilde{S}_n)_{n\geqslant 0}$ ont même loi. En déduire, en fonction de $t$, la valeur de la limite suivante
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{tI_n}\right).$$

## Log-Laplace d'une variable aléatoire

6. Montrer que la fonction $\lambda$ définie par (1) est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée seconde. En déduire que $\lambda$ est strictement convexe.
7. Déterminer $\lambda$ dans les cas suivants :
   (a) $\eta$ suit la loi gaussienne centrée réduite dont la densité est donnée par
   $$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$
   (b) $\eta$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$ : $\mathbb{P}(\eta = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\eta = 0)$.

## Inégalité FKG

Soient $X = (X_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ bornées et croissantes au sens où $f(x) \leqslant f(y)$ si $x_i \leqslant y_i$ pour $i = 1, \dots, k$. On souhaite montrer que
$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) \geqslant \mathbb{E}(f(X))\,\mathbb{E}(g(X)).$$

8. Établir l'inégalité lorsque $k = 1$.
9. Généraliser ce résultat à tout entier $k \geqslant 1$.

Dans la suite on pourra utiliser ce résultat pour des fonctions $f$ et $g$ de carré intégrable.
**Remarque.** Cette propriété porte le nom d'inégalité FKG (pour Fortuin, Kasteleyn et Ginibre).

## Propriétés élémentaires du modèle

10. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
    $$Z_n(\beta) = \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\gamma\in\Gamma_n} e^{\beta \sum_{i=1}^n \eta(i,\gamma_i)},$$
    et que les variables aléatoires $Z_n(\beta)$, $q_n(\beta)$, $W_n(\beta)$ sont $\mathcal{G}_n$-mesurables.

Dans les deux questions suivantes, on fixe $\beta \geqslant 0$ et $\gamma \in \Gamma_n$.

11. Montrer que
    $$\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(\gamma)}\Big) = e^{n\lambda(\beta)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\Big(H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}\Big) = n\lambda'(\beta)e^{n\lambda(\beta)}.$$
12. En déduire que la mesure $\nu_{n,\gamma}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par
    $$\nu_{n,\gamma}(f) = \mathbb{E}\Big(f\Big((\eta(i,\gamma_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\Big)e^{\beta H_n(\gamma)-n\lambda(\beta)}\Big)$$
    pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une mesure de probabilité produit sur $\mathbb{R}^n$ que l'on explicitera en fonction de $\lambda$ et de la loi de $\eta$ que l'on pourra noter $Q_\eta$.

# Partie II

## Convergence de la fonction de partition normalisée

1. Montrer que, pour tout $\beta \geqslant 0$, tout $n \geqslant 1$ et tout $p \geqslant 1$, la variable aléatoire $W_n(\beta)^p$ est intégrable. Que vaut $\mathbb{E}(W_n(\beta))$ ?
2. En déduire que $(W_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$ puis que la suite $(W_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ converge vers une variable aléatoire $W_\infty(\beta)$ $\mathbb{P}$-presque sûrement quand $n$ tend vers l'infini. Comparer $\mathbb{E}(W_\infty(\beta))$ et 1.
3. Montrer que l'événement $\{W_\infty(\beta) = 0\}$ appartient à la tribu asymptotique
$$\bigcap_{n\geqslant 1} \sigma\Big(\eta(j,x),\ j \geqslant n,\ x \in \mathbb{Z}^d\Big).$$
4. Quelles valeurs peut prendre la probabilité $\mathbb{P}(W_\infty(\beta) = 0)$ ?

Soit $\theta \in (0,1)$.

5. Montrer que la suite $(\mathbb{E}(W_n(\beta)^\theta))_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 si et seulement si la variable aléatoire $W_\infty(\beta)$ est nulle $\mathbb{P}$-presque sûrement.
6. Montrer que
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}(W_n(\beta)^\theta) = \theta\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^{\theta-1}(H_n(S_{0:n}) - n\lambda'(\beta))e^{\beta H_n(S_{0:n}) - n\lambda(\beta)}\Big).$$
7. Soit $\gamma \in \Gamma_n$. Montrer grâce à l'inégalité FKG que
$$\mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^{\theta-1}(H_n(\gamma) - n\lambda'(\beta))e^{\beta H_n(\gamma) - n\lambda(\beta)}\Big) \leqslant 0.$$
On pourra remarquer que $H_n(\gamma) - n\lambda'(\beta)$ et $W_n(\beta)^{\theta-1}$ sont des fonctions monotones des variables $(\eta(i,x))_{(i,x)\in E_n}$ et appliquer l'inégalité FKG à une mesure de probabilité que l'on précisera. Quel est le sens de variation de la fonction $\beta \mapsto \mathbb{E}(W_n(\beta)^\theta)$ ?
8. En déduire qu'il existe $\bar\beta_c \in [0,+\infty]$ tel que, $\mathbb{P}$-presque sûrement,
$$\begin{cases} W_\infty(\beta) > 0 & \text{si } \beta < \bar\beta_c, \\ W_\infty(\beta) = 0 & \text{si } \beta > \bar\beta_c. \end{cases}$$

## Borne inférieure pour $\bar\beta_c$

On définit la fonction $\tau$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\tau(\beta) = \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)$.

9. Montrer que la fonction $\tau$ est strictement croissante.
10. Montrer que, pour tout $\beta \geqslant 0$,
$$W_n(\beta)^2 = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\beta(\eta(k,S_k)+\eta(k,\tilde S_k)) - 2\lambda(\beta)} | \mathcal{G}\right).$$
11. En déduire que $\mathbb{E}(W_n(\beta)^2) = \mathbb{E}\Big(e^{\tau(\beta)I_n}\Big)$ où $I_n$ est défini à la question 5 de la partie I.

12. Montrer que $\tau(\beta) < \ln(1/\pi_d)$ si et seulement si $\sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}\Big(W_n(\beta)^2\Big)$ est fini.
13. Si cette condition est satisfaite, montrer que $W_\infty(\beta) > 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.
14. En déduire que $\bar{\beta}_c > 0$.
15. Que dire de $\bar{\beta}_c$ si $\eta$ suit la loi gaussienne standard ?

# Partie III

## Existence de la limite de l'énergie libre

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $n$ et $m$ entiers strictement positifs, on note

$$Z_{n,m}^x(\beta) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\beta \sum_{i=1}^m \eta(n+i, x+S_i)\right)|\mathcal{G}\right].$$

1. Établir que pour tout $\beta \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$, $u_n(\beta) \leqslant \lambda(\beta)$.
2. Montrer que, $\mathbb{P}$-presque sûrement,
$$\mathbb{E}\Big(e^{\beta H_{n+m}(S_{0:n+m})}|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{\beta H_n(S_{0:n})} Z_{n,m}^{S_n}(\beta)|\mathcal{G}\Big).$$
3. En déduire que, $\mathbb{P}$-presque sûrement,
$$\ln Z_{n+m}(\beta) \geqslant \ln Z_n(\beta) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_n(S_n = x) \ln Z_{n,m}^x(\beta).$$
4. Pourquoi les variables aléatoires $Z_{n,m}^x(\beta)$ et $Z_m(\beta)$ ont-elles même loi ?
5. Montrer que la suite $(\mathbb{E}(\ln Z_n(\beta)))_{n\geqslant 1}$ est sur-additive. En déduire que la suite $(u_n(\beta))_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite finie que nous noterons $u(\beta)$.

## Monotonie et transition de phase

6. Montrer que, pour tout $\beta \geqslant 0$ et tout $\gamma \in \Gamma_n$,
$$\mathbb{E}\left(\frac{H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right) \leqslant e^{-n\lambda(\beta)}\mathbb{E}\left(\frac{e^{\beta H_n(\gamma)}}{Z_n(\beta)}\right)\mathbb{E}\Big(H_n(\gamma)e^{\beta H_n(\gamma)}\Big).$$
On pourra remarquer que $H_n(\gamma)$ et $Z_n(\beta)^{-1}$ sont des fonctions monotones de certaines variables $(\eta(i,x))_{(i,x)\in E_n}$ et appliquer l'inégalité FKG à une mesure de probabilité que l'on précisera.
7. Montrer que, pour tout $\beta \geqslant 0$,
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}(\ln Z_n(\beta)) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}\Big(H_n(S_{0:n})e^{\beta H_n(S_{0:n})}|\mathcal{G}\Big)}{Z_n(\beta)}\right).$$
8. Quelles sont les variations des fonctions $u_n(\cdot) - \lambda(\cdot)$ et $u(\cdot) - \lambda(\cdot)$ ?
9. En conclure qu'il existe $\beta_c \in [0, +\infty]$ tel que
$$\begin{cases} u(\beta) = \lambda(\beta) & \text{si } \beta < \beta_c, \\ u(\beta) < \lambda(\beta) & \text{si } \beta > \beta_c. \end{cases}$$

## Borne supérieure pour $\beta_c$

Cette section établit une condition suffisante pour que $\beta_c$ soit fini.

10. Montrer que $\mathbb{P}$-presque-sûrement la fonction $q_n(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$ et est nulle en 0.
11. En déduire que la fonction $u(\cdot)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0 et que la fonction $\beta \mapsto \beta^{-1} q_n(\beta)$ est $\mathbb{P}$-presque-sûrement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
12. Établir la décroissance de la fonction $\beta \mapsto \beta^{-1}(q_n(\beta) + \ln(2d))$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra comparer la dérivée de cette fonction à la quantité suivante
$$h(\mu_n) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \mu_n(\gamma) \ln \mu_n(\gamma).$$
13. Montrer que, pour tout $\beta > 0$,
$$\frac{u_n(\beta) + \ln(2d)}{\beta} \leqslant \inf_{\alpha \in ]0,\beta]} \frac{\lambda(\alpha) + \ln(2d)}{\alpha}.$$
14. Pourquoi l'équation $\beta \lambda'(\beta) = \lambda(\beta) + \ln(2d)$ d'inconnue $\beta$ admet-elle au plus une solution $\beta_1 > 0$ ? En supposant que cette solution existe, montrer que, pour tout $\beta > \beta_1$,
$$u(\beta) \leqslant \frac{(\lambda(\beta_1) + \ln(2d))}{\beta_1} \beta - \ln(2d).$$
15. Si $\beta_1$ existe, conclure que $\beta_c$ est fini.
16. Déterminer $\beta_1$ en fonction de $d$ si la variable aléatoire $\eta$ est de loi gaussienne centrée réduite. À quelle condition $\beta_1$ existe-t-il si la variable aléatoire $\eta$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$ ?
17. Montrer que $\bar{\beta}_c \leqslant \beta_c$.

# – Fin de l'épreuve –