2C2121

Ecole Normale Supérieure de Cachan

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER
MATHEMATIQUES

Session 2012

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Ce sujet est composé de deux parties totalement indépendantes. Il est recommandé, mais nullement imposé, de les traiter dans l'ordre. Dans les deux parties, on note respectivement $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles des nombres entiers naturels, entiers relatifs, réels et complexes.

1. Première partie

Notations. On note ℓ^1 l'espace vectoriel des suites doublement infinies et sommables de nombres complexes :

$$\ell^1 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}.$$

Pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartenant à ℓ^1, on note

$$\|a\|_{\ell^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|.$$

On pourra utiliser sans le vérifier le fait que la fonction $\|\cdot\|_{\ell^1}$ est une norme sur l'espace vectoriel ℓ^1 et que l'espace vectoriel normé $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ est complet.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on note e_p l'élément de ℓ^1 défini par les égalités $(e_p)_p = 1$ et $(e_p)_n = 0$ pour tout $n \neq p$.

On note $C^0_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques d'une variable réelle à valeurs complexes. On munit $C^0_{2\pi}$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui est définie, pour tout $f \in C^0_{2\pi}$, par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}.$$

On rappelle que l'espace vectoriel normé $(C^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. On note $C^1_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel de $C^0_{2\pi}$ formé des fonctions continûment dérivables.

Soit f un élément de $C^0_{2\pi}$. On définit la suite doublement infinie $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f en posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\, dt.$$

1. a. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de ℓ^1. Montrer que la suite b est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la série de terme général $(a_k b_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente. Montrer que la suite $a * b$ définie en posant

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (a * b)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$$

appartient à ℓ^1 et qu'on a l'inégalité

$$\|a * b\|_{\ell^1} \leqslant \|a\|_{\ell^1} \|b\|_{\ell^1}. \tag{1}$$

On pourra désormais utiliser sans le vérifier le fait que l'opération $*$ munit ℓ^1 d'une structure d'algèbre commutative sur $\mathbb{C}$.

1. b. Montrer que l'algèbre $(\ell^1, *)$ possède une unité, c'est-à-dire qu'il existe un élément $u \in \ell^1$ tel que l'on ait, pour tout $a \in \ell^1$, les égalités $a * u = u * a = a$.

1. c. Montrer que l'élément $e_1 + e_{-1}$ de ℓ^1 n'admet pas d'inverse pour l'opération $*$.

On se propose dans ce qui suit de caractériser les éléments de ℓ^1 qui admettent un inverse pour l'opération $*$.

2. a. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un élément de ℓ^1. Montrer que pour tout réel t, la série de terme général $(a_n e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est convergente et que la fonction $\mathsf{G}(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathsf{G}(a)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$$

appartient à $C^0_{2\pi}$. Calculer les coefficients de Fourier de $\mathsf{G}(a)$.

2. b. Montrer que l'application $\mathsf{G} : \ell^1 \longrightarrow C^0_{2\pi}$ est injective.

2. c. Montrer que l'image de l'application G contient $C^1_{2\pi}$.

3. a. Montrer que pour tout $a \in \ell^1$ on a l'inégalité $\|\mathsf{G}(a)\|_\infty \leqslant \|a\|_{\ell^1}$. Existe-t-il une constante $c < 1$ telle qu'on ait $\|\mathsf{G}(a)\|_\infty \leqslant c\|a\|_{\ell^1}$ pour tout a dans ℓ^1 ? Déterminer la norme de l'application linéaire G.

3. b. Démontrer l'inégalité

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

sans utiliser l'inégalité $\pi \leqslant 2\sqrt{3}$, ou alors en la démontrant (mais cela ne vous est pas conseillé).

3. c. Soit a un élément de ℓ^1. Montrer que si la fonction $\mathsf{G}(a)$ est de classe C^1, alors

$$\|a\|_{\ell^1} \leqslant \|\mathsf{G}(a)\|_\infty + 2\|\mathsf{G}(a)'\|_\infty,$$

où $\mathsf{G}(a)'$ désigne la dérivée de $\mathsf{G}(a)$.

4. a. Soient a et b deux éléments de ℓ^1. Exprimer $\mathsf{G}(a * b)$ en fonction de $\mathsf{G}(a)$ et $\mathsf{G}(b)$.

4. b. Montrer que si a est inversible dans $(\ell^1, *)$, alors la fonction $\mathsf{G}(a)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

4. c. Montrer que si la fonction $\mathsf{G}(a)$ est de classe C^1 et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors a est inversible dans $(\ell^1, *)$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $(a^{-1})_n$ en fonction de $\mathsf{G}(a)$.

4. d. Soit r un nombre réel tel que $|r| < 1$. Montrer que l'élément $(r^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ de ℓ^1 est inversible et calculer son inverse.

On va montrer que les éléments inversibles de l'algèbre $(\ell^1, *)$ sont ceux dont l'image par G est une fonction qui ne s'annule pas.

Pour tout $a \in \ell^1$ et tout entier n positif, on note a^n la n-ième puissance de a dans l'algèbre $(\ell^1, *)$, c'est-à-dire qu'on définit la suite $(a^n)_{n \geqslant 0}$ par récurrence en posant $a^0 = e_0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a^n = a * a^{n-1}$.

5. On considère un élément a de ℓ^1 tel que la fonction $\mathsf{G}(a)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
5. a. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $|\mathsf{G}(a)(t)| \geqslant \alpha$.
5. b. Montrer qu'il existe un élément $b \in \ell^1$ tel que la fonction $\mathsf{G}(b)$ soit de classe C^1 et tel qu'on ait l'inégalité $\|b - a\|_{\ell^1} \leqslant \frac{\alpha}{4}$.
5. c. Montrer que b est inversible et que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a l'inégalité

$$\|(b^{-1})^n\|_{\ell^1} \leqslant \frac{4^n}{(3\alpha)^n} \left(1 + \frac{3\alpha n}{2} \|(\mathsf{G}(b)^{-1})'\|_\infty \right).$$

5. d. Montrer que la série

$$\sum_{n \geqslant 0} (b^{-1})^{n+1} * (b - a)^n$$

converge dans l'espace vectoriel normé $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ et que sa somme est l'inverse de a.

La dernière question de cette partie est consacrée à la démonstration du fait que l'application $\mathsf{G} : \ell^1 \to C^0_{2\pi}$ n'est pas surjective. On pose, pour tout $n \geqslant 1$ et tout t réel,

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

6. a. Établir, pour tout $n \geqslant 1$ les deux expressions suivantes de la dérivée de la fonction S_n, valables pour tout réel t qui n'est pas un multiple entier de 2π :

$$S_n'(t) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\big((n+1)t\big) + \frac{1}{2}\sin\big((n+1)t\big) \operatorname{cotg} \frac{t}{2},$$

où cotg désigne la fonction cotangente. On rappelle que pour tous réels x et y on a l'égalité $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$.
6. b. Déterminer les points de l'intervalle $[0, \pi]$ où S_n atteint des maximums locaux.
6. c. Montrer que pour tout entier naturel j tel que $2j \leqslant n - 1$, on a

$$S_n\left(\frac{2j+1}{n+1}\pi\right) > S_n\left(\frac{2j+3}{n+1}\pi\right).$$

6. d. En déduire que $\|S_n\|_\infty = S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, que la suite $(\|S_n\|_\infty)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel que l'on déterminera, puis qu'il existe un réel C tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t on ait $|S_n(t)| \leqslant C$.

6. e. Montrer que la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{\sin(nt)}{n \log n}$$

converge uniformément vers un élément de $C^0_{2\pi}$ qui n'appartient pas à l'image de G.

2. Deuxième partie

Cette partie est indépendante de la précédente.

Notations. Sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, on note $\lambda_{\mathbb{R}}$ la mesure de Lebesgue. On considère la mesure μ absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathbb{R}}$ et de densité

$$\frac{d\mu}{d\lambda_{\mathbb{R}}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

On note $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable par rapport à μ. Le produit scalaire de deux éléments $f, g \in \mathcal{H}$ est donné par

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} \, dx,$$

où, conformément à l'usage, on note dx au lieu de $\lambda_{\mathbb{R}}(dx)$ la mesure de Lebesgue. On note $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ la norme associée.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels à une indéterminée, qu'on identifiera avec l'espace des fonctions polynomiales réelles d'une variable réelle. Pour tout $n \geqslant 0$, on note m_n l'élément de $\mathbb{R}[X]$ défini par $m_n(X) = X^n$.

Sur $\mathbb{C}$ muni de la tribu borélienne, on note $\lambda_{\mathbb{C}}$ la mesure de Lebesgue. On définit la mesure ν absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathbb{C}}$ et de densité

$$\frac{d\nu}{d\lambda_{\mathbb{C}}}(z) = \frac{2}{\pi} e^{-2|z|^2}.$$

On note $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{C}, \nu)$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable par rapport à ν. Le produit scalaire de deux éléments $A, B \in \mathcal{K}$ est donné par

$$\langle A, B \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{C}} A(z) \overline{B(z)} e^{-2|z|^2} \, dz,$$

où l'on note dz au lieu de $\lambda_{\mathbb{C}}(dz)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. On note $\| \cdot \|_{\mathcal{K}}$ la norme associée.

On note $\mathbb{C}[Z]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à une indéterminée, qu'on identifiera avec l'espace des fonctions polynomiales complexes d'une variable complexe. Pour tout $n \geqslant 0$, on note M_n l'élément de $\mathbb{C}[Z]$ défini par $M_n(Z) = Z^n$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathsf{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathsf{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

On rappelle que $\mathsf{F}(f)$ est la fonction nulle si et seulement si f est nulle presque partout.

Si C et D sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel, on note $[C, D]$ leur commutateur, qui est défini comme l'endomorphisme $C \circ D - D \circ C$ de cet espace vectoriel.

On pourra utiliser l'égalité suivante, valable pour tout nombre complexe z :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+z)^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

7. a. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$.

7. b. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe son polynôme dérivé. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme D^* de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tous polynômes P et Q, on ait

$$\langle D(P), Q\rangle_{\mathcal{H}} = \langle P, D^*(Q)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

7. c. On définit une suite de polynômes $(H_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $H_0(X) = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$H_{n+1} = D^*(H_n).$$

Montrer que pour tous entiers n, m tels que $n \neq m$, on a $\langle H_n, H_m\rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

7. d. Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, le coefficient dominant du polynôme H_n, calculer le polynôme $D^n(H_n)$, puis déterminer $\|H_n\|_{L^2}$.

8. Soit $f \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$ on ait $\langle f, H_n\rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

8. a. Montrer que pour tout polynôme P on a $\langle f, P\rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

8. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer $\|m_n\|_{\mathcal{H}}$ en fonction de $\|m_{n-1}\|_{\mathcal{H}}$, puis calculer $\|m_n\|_{\mathcal{H}}$.

8. c. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(i\xi x)^n}{n!}$ converge dans $\mathcal{H}$ vers la fonction $x \mapsto e^{i\xi x}$.

8. d. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x^2}$ et montrer que la fonction f est nulle presque partout.

8. e. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\right)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

9. Pour tout couple $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, on pose $G(z, w) = e^{-z^2+2zw}$.

9. a. Déterminer, pour tout $n \geqslant 0$, un polynôme K_n à coefficients réels tel qu'on ait

$$\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2,\ G(z, w) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{K_n(w)}{n!} z^n.$$

9. b. En comparant les dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial w}$ et $\frac{\partial G}{\partial z}$, établir une relation de récurrence satisfaite par la suite de polynômes $(K_n)_{n\geqslant 0}$ et montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a l'égalité $K_n = H_n$.

9. c. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$$

converge dans $\mathcal{H}$ vers la fonction g_z définie par $g_z(x) = G(z,x)$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est entière si elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

10. a. Montrer que $\mathbb{C}[Z]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ et calculer, pour tous m et n entiers naturels, le produit scalaire $\langle M_n, M_m\rangle_{\mathcal{K}}$.
10. b. Soit $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière dont le développement en série entière est donné par

$$A(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

Montrer soigneusement que A appartient à $\mathcal{K}$ si et seulement si la série de terme général $2^{-n} n! |a_n|^2$ converge et qu'alors on a l'égalité

$$\|A\|_{\mathcal{K}}^2 = \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} n! |a_n|^2.$$

On pourra commencer par fixer un réel positif R et étudier l'intégrale de la fonction $z \mapsto |A(z)|^2 e^{-2|z|^2}$ sur le disque de rayon R centré en l'origine.

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont d'une part des fonctions entières et d'autre part des fonctions de carré intégrable par rapport à ν. L'espace $\mathcal{E}$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ et on admettra c'est un sous-espace fermé.

11. a. Soit f un élément de $\mathcal{H}$. Vérifier que l'égalité

$$(\mathsf{S}(f))(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-(z-x)^2}\, dx$$

définit bien une fonction $\mathsf{S}(f)$ de la variable complexe z.
11. b. Soit u un nombre complexe u. On définit la fonction $g_u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en posant, pour tout x réel, $g_u(x) = G(u,x)$. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $\mathsf{S}(g_u)(z) = e^{2uz}$.

11. c. Soit f un élément de $\mathcal{H}$. En écrivant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathsf{S}(f)(z)$ comme le produit scalaire de f avec un certain élément de $\mathcal{H}$, montrer que $\mathsf{S}(f)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini dont on déterminera les coefficients.
11. d. Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \geqslant 0,\ \mathsf{S}(H_n) = 2^n M_n,$$

puis que l'application S est une isométrie surjective de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{E}$.

12. a. Calculer, pour tout réel t, l'image par S de la fonction $x \mapsto e^{2tx} = e^{t^2} g_t(x)$.
12. b. Pour tout $n \geqslant 0$, on note respectivement $\pi_n : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_n[X]$ et $\Pi_n : \mathcal{K} \to \mathbb{C}_n[Z]$ les projections orthogonales sur les sous-espaces vectoriels formés des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'on a l'égalité $\mathsf{S} \circ \pi_n = \Pi_n \circ \mathsf{S}$.
12. c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe z, on a

$$\mathsf{S}(2^n m_n)(z) = (-i)^n H_n(iz).$$

12. d. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe z, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\, dx = (-i)^n H_n(iz).$$

12. e. Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, la transformée de Fourier de la fonction ψ_n définie par $\psi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$.
12. f. Donner une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$ dans laquelle la transformée de Fourier est diagonale et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur de cette base orthonormée.
12. g. On conserve la notation F pour le prolongement isométrique de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$. Si $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction complexe d'une variable complexe, on définit $\mathsf{Q}(A) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en posant, pour tout nombre complexe z,

$$\mathsf{Q}(A)(z) = A(-iz).$$

Enfin, on note $\mathsf{M} : L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}) \to \mathcal{H}$ l'opérateur défini, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$ et tout x réel, par

$$(\mathsf{M}f)(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x).$$

Montrer que pour tout élément f de $L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$, les deux membres de l'équation

$$\mathsf{F}(f) = \left((\mathsf{S} \circ \mathsf{M})^{-1} \circ \mathsf{Q} \circ (\mathsf{S} \circ \mathsf{M})\right)(f)$$

ont un sens, et sont égaux.

– Fin du sujet –