RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES DU CONCOURS 3$^{\text{ÈME}}$ ANNÉE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN - SESSION 2011

Le sujet traite, d'une manière générale, de stabilisation de systèmes régis par des équations différentielles à l'aide d'une loi de commande u. Afin de traiter cette épreuve convenablement, les candidats devaient essentiellement utiliser leurs connaissances dans les domaines de l'algèbre linéaire (diagonalisation, trigonalisation, valeurs propres, théorème spectral, théorème de Cayley-Hamilton, ...) et de la théorie des équations différentielles. Le sujet comporte quatre parties indépendantes (à l'exception de la toute dernière question du problème, ainsi que cela était mentionné dans le sujet).

- La partie I était destinée à se familiariser avec les notions de *stabilité* et *stabilité asymptotique* pour des systèmes linéaires. On demandait d'étudier la stabilité des points stationnaires essentiellement sur des exemples concrets (matrice diagonalisable, antisymétrique, bloc de Jordan,...).

- Dans la partie II, on introduisait dès le début la notion de commande pour des systèmes linéaires du type $x' = Ax + Bu$. Les premières questions étaient destinées à démontrer le critère de Kalman, permettant de caractériser l'ensemble des états atteignables du système différentiel à l'aide de la loi de commande u. À la fin de cette partie, on étudiait une loi de commande particulière.

- La partie III était consacrée à la démonstration du théorème de placement des pôles. On montrait qu'en choisissant une loi de commande de la forme $u = BK$, il est possible d'obtenir n'importe quel spectre pour la matrice $A+BK$ donc, en particulier, de stabiliser le système différentiel $x' = Ax+Bu$.

- Le début de la partie IV a pu sembler classique pour certains candidats (bien qu'il n'ait été correctement traité que par un très petit nombre d'entre eux...). On définissait la notion de fonction de Lyapunov et en démontrait les propriétés caractéristiques. La suite (et la fin) du problème s'intéressait aux systèmes différentiels non linéaires. Des conditions suffisantes de stabilité de l'équilibre, puis de stabilisabilité (par une loi de commande) sur le système linéarisé étaient alors exhibées.

Ce problème constitue, dans une certaine mesure, une brève introduction à la théorie du contrôle. Les thèmes mathématiques abordés, en particulier dans les trois premières parties relevaient essentiellement des connaissances d'algèbre linéaire de licence et de la théorie des équations différentielles linéaires autonomes. De façon générale, beaucoup de copies étaient bien rédigées. Il a été parfois surprenant de constater que, dans le cas d'un très petit nombre de copies, des erreurs de fond ont été commises, portant sur des notions qui devraient être maîtrisées depuis des années.

- *Préliminaires*. Dans l'ensemble, les préliminaires ont été bien traitées. Rappelons que le rôle des préliminaire est de mettre l'accent sur des petits résultats simples, dont on ne souhaite pas qu'ils constituent une difficulté pour les candidats dans la suite de l'épreuve. Il faut donc veiller à ne pas passer trop de temps sur ces questions. Une rédaction brève, mais efficace est amplement suffisante. Attention également : la notion de convergence normale de séries n'est pas toujours utilisée correctement. Dans plusieurs copies, il a été vu : si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ est dérivable, de dérivée $\sum f_n'$!

- *Partie I*. Bien qu'elle ait été globalement bien traitée, voici quelques points qui ont posé problème : le calcul d'une exponentielle de matrice 3×3 n'est pas toujours correct (question I.4 (a)), peu de candidats savent (démontrer) que le spectre d'une matrice antisymétrique réelle se répartit sur l'axe des imaginaires purs (question I.6 (a)). Plus préoccupant, la formule de Duhamel (question I.1) n'est pas toujours correctement écrite (on voit parfois la notation bA, avec b, un vecteur colonne et A, une matrice carrée). Dans la question I.2, beaucoup de candidats clament l'unicité du point d'équilibre, ce qui, sans aucune hypothèse supplémentaire sur A, n'a aucune raison d'être.

- *Partie II.* Beaucoup de candidats éprouvent des difficultés à démontrer qu'un espace est affine. Le théorème de Cayley-Hamilton n'a pas toujours été invoqué dans la question II.2 (a). Peu de candidats ont pensé à utiliser l'orthogonal des ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{R}$ pour démontrer les relations d'inclusions. Quelques copies se sont démarquées dans cette partie, tant du point de vue de la qualité des réponses que de leur rédaction.

- *Parties III et IV.* Elles n'ont été abordées que par très peu de candidats, ce qui est tout à fait compréhensible, étant donné la longueur du sujet.