Concours d'admission en troisième année. Epreuve de Maths II - Sujet 2 - Analyse numérique

Le sujet porte sur l'établissement de la formule de Baker-Campbell-Haussdorff (BCH en abrégé), une formule permettant d'exprimer le logarithme du produit de deux exponentielles de matrices qui ne commutent pas. C'est une formule très utile en analyse numérique des équations différentielles, puisqu'elle permet de dériver les conditions d'ordres pour les méthodes de splitting d'opérateurs.

La première partie du sujet introduit les commutateurs et leurs itérés et aboutit au calcul de la différentielle de l'application exponentielle de matrice.

La seconde partie permet de démontrer que l'opérateur $dexp_\Omega$ est inversible et de calculer son inverse à l'aide de la séries génératrice des nombres de Bernoulli.

La troisième partie permet d'établir que le logarithme du produit de deux exponentielles de matrices qui ne commutent pas s'obtient à partir de la solution d'une équation différentielle (matricielle) et d'en calculer les premiers termes, lesquels seront utilisés dans la dernière partie.

La quatrième et dernière partie est une application de la formule BCH au calcul des conditions d'ordre pour les méthodes de splitting d'opérateurs.

Remarques sur les copies

Le sujet était long et relativement technique. Les bonnes copies sont celles des candidats qui se sont attachés à démontrer rigoureusement les convergences de série et ont su éviter de faire commuter les matrices A et B jusqu'au bout du sujet...

Partie I : Une définition de la différentielle étant rappelée, la difficulté consistait à manipuler correctement l'opérateur de commutation et à justifier les convergences de séries de matrices. A noter qu'il subsistait un coquille dans l'énoncé de la question 2 : la plupart des candidats l'ont repérée et "corrigée" sans aucune difficulté.

Partie II : Cette partie était plus délicate, en particulier les questions portant sur les conditions d'inversibilité de l'opérateur $dexp_\Omega$, où la difficulté consistait à justifier qu'on obtient tout le spectre de $dexp_\Omega$ à partir de celui de ad_Ω. Ce point n'a été que très rarement bien traité. Par ailleurs, la question portant sur le rayon de convergence de la série génératrice des nombres de Bernoulli n'a été traitée correctement que par un seul candidat. Il s'agissait d'utiliser un résultat sur les fonctions holomorphes, visiblement inconnu de la plupart.

Partie III : Cette partie a été dans l'ensemble correctement traitée en dehors de l'"astuce" de réécriture $\exp(-Z(s,t)) = \exp(-tB)\exp(-sA)$ qui n'a été utilisée que par une partie des candidats. Par ailleurs, la fin de cette partie comportait un certain nombre de calculs qui n'ont été menés jusqu'à leur terme que par une minorité de candidats.

Partie IV : Cette partie était plus facile que les autres, mais longue et très calculatoire lorsqu'on ne recourt pas aux résultats des parties précédentes, ce qui était l'idée directrice. De nombreux candidats ont donc refait de longs développements inutiles et perdu beaucoup de temps.