Sujet Analyse Numérique

Durée 5H

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à éléments dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|.\|$, que l'on suppose multiplicative, c'est-à-dire telle

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

On rappelle que si pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$, alors la somme $f + g$ et le produit fg sont des séries entières de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$. Le produit (de Cauchy) des deux séries se calcule alors par la formule

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

La substitution de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dans $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est possible si le coefficient $a_0 = f(0)$ est nul. La série obtenue par substitution est de rayon R strictement positif. Sur un disque de rayon $0 < R' \leq R$, la somme de la série obtenue est la composée $g \circ f$.

Pour toute matrice A de norme $\|A\| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum_{n\geq 0} a_n A^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n A^n$ sont absolument convergentes et donc bien définies, et les opérations somme, produit et substitution, restent licites sous les mêmes conditions que pour les séries entières. On définit donc l'exponentielle $\exp(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la série convergente

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Pour $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, on définit l'opérateur ad_Ω comme l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}_\Omega : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \mathrm{ad}_\Omega(A) = \Omega A - A\Omega \end{array}$$

et on note ad_Ω^i l'opérateur composé $\underbrace{\mathrm{ad}_\Omega \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_\Omega}_{i \text{ fois}}$. La norme considérée sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ est la norme subordonnée, qu'on notera encore $\|.\|$: en particulier, on a

$$\|\mathrm{ad}_\Omega\| = \sup_{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|A\|\neq 0} \frac{\|\mathrm{ad}_\Omega(A)\|}{\|A\|}$$

Lorsque A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$. L'objectif des trois premières parties de ce sujet est d'établir une formule, dite formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH en abrégé), dans le cas où A et B ne commutent pas.

La quatrième partie concerne l'approximation de $\exp(t(A+B))$ par des produits de matrices de la forme $\exp(taA)$ et $\exp(tbB)$. Les parties sont indépendantes les unes des autres sauf mention explicite dans certaines questions.

Première Partie

On rappelle que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Pi_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \Omega & \mapsto & \Omega^k \end{array}$$

est différentiable et que sa différentielle $D\Pi_k(\Omega)$ au point Ω est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad D\Pi_k(\Omega) \cdot H = \lim_{t \to 0} \frac{(\Omega + tH)^k - \Omega^k}{t}$$

Question 1 : Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $D\Pi_k(\Omega) \cdot H$ pour $k = 1, 2, 3$.

Question 2 : Etablir les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} D\Pi_k(\Omega) \cdot H & = & 2H\Omega + \mathrm{ad}_\Omega(H) \\ D\Pi_k(\Omega) \cdot H & = & 3H\Omega^2 + 3\mathrm{ad}_\Omega(H)\Omega + \mathrm{ad}_\Omega^2(H) \end{array}$$

Question 3 : A partir de la définition de la différentielle $D\Pi_k(\Omega)$, justifier que pour tout $k \geq 1$

$$D\Pi_{k+1}(\Omega) \cdot H = \Big(D\Pi_1(\Omega) \cdot H\Big)\Omega^k + \Omega\Big(D\Pi_k(\Omega) \cdot H\Big)$$

Question 4 : En déduire que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$D\Pi_k(\Omega) \cdot H = \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} k \\ i+1 \end{pmatrix} \mathrm{ad}_\Omega^i(H)\Omega^{k-1-i}$$

Question 5 : Etablir que l'opérateur ad_Ω^i est borné par $2^i \|\Omega\|^i$.

Question 6 : Soit $d\exp_\Omega$ l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad d\exp_\Omega H = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{ad}_\Omega^k(H)$$

(On ne confondra pas la notation $d\exp_\Omega$ avec la différentielle $D\exp(\Omega)$ de $\exp(\Omega)$ utilisée ci-après). Justifier que la série converge pour tout H et donner une borne de l'opérateur $d\exp_\Omega$.

Question 7 : Montrer que l'application $\Omega \mapsto \exp(\Omega)$ est différentiable en tout $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $D\exp(\Omega)$ sa différentielle de $\Omega \mapsto \exp(\Omega)$ au point Ω. Montrer que

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad D\exp(\Omega) \cdot H = (d\exp_\Omega(H)) \exp(\Omega)$$

On justifiera les calculs.

Deuxième Partie

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice fixée non nulle.

Question 1 : Montrer que 0 est valeur propre de ad_Ω. Déterminer son noyau dans le cas où $n = 2$ et

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 2 : On rappelle que ad_Ω et $d\exp_\Omega$ sont des endormorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour toute valeur propre non nulle λ de ad_Ω, $\frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$ est valeur propre de $d\exp_\Omega$.

Question 3 : En s'appuyant sur le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2, donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de ad_Ω pour que $d\exp_\Omega$ soit inversible.

Question 4 : Soit $B_0 = 1$. On suppose que les nombres B_k, $k \in \mathbb{N}^*$ satisfont la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

Montrer que la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est entièrement déterminée. Calculer B_1, B_2, B_3 et B_4.

Question 5 : On considère la série entière $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$ pour $z \in \mathbb{C}$. Montrer que le rayon de convergence de $S(z)$ est 2π et que l'on a la relation

$$\forall z, 0 < |z| < 2\pi, \quad S(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

Question 6 : En déduire que B_{2k+1} est nul pour tout $k \geq 1$.

Question 7 : On suppose que $\|\Omega\| < \pi$. Déterminer l'expression de l'inverse $d\exp_\Omega^{-1}$ de l'opérateur $d\exp_\Omega$.

Troisième Partie

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne commutent pas. L'objectif de cette partie est de trouver une fonction matricielle $t \mapsto C(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout t suffisamment petit, on ait :

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(C(t))$$

puis d'établir que $C(t)$ satisfait une équation différentielle dont on déterminera l'expression.

Question 1 : Etablir que $\exp(tA)\exp(tB) = I + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \mathcal{O}(t^3)$.

Question 2 : On pose $X(t) = \exp(tA)\exp(tB) - I = t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \mathcal{O}(t^3)$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $|t| \leq \epsilon$, la série

$$C(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} X(t)^k$$

converge et que $C(t)$ vérifie $\exp(tA)\exp(tB) = \exp(C(t))$.

Question 3 : Montrer qu'il existe C_1 et C_2 and $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $C(t) = tC_1 + t^2C_2 + \mathcal{O}(t^3)$ et les expliciter.

Question 4 : Montrer de la même manière que pour $|s| \leq \epsilon$ et $|t| \leq \epsilon$, il existe une fonction $(s,t) \mapsto Z(s,t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de classe C^1 par rapport à (s,t), et telle que

$$\exp(sA)\exp(tB) = \exp(Z(s,t))$$

Question 5 : En utilisant la question 7 de la première partie et la question 7 de la seconde, montrer l'égalité suivante :

$$A\exp(sA)\exp(tB) = \left(d\exp_{Z(s,t)}\left(\frac{\partial Z}{\partial s}(s,t)\right)\right)\exp(Z(s,t))$$

et en déduire que

$$\frac{\partial Z}{\partial s}(s,t) = d\exp^{-1}_{Z(s,t)}(A) = A - \frac{1}{2}\mathrm{ad}_{Z(s,t)}(A) + \sum_{k\geq 2}\frac{B_k}{k!}\mathrm{ad}^k_{Z(s,t)}(A)$$

Question 6 : Montrer de la même manière que

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(s,t) = d\exp^{-1}_{-Z(s,t)}(B) = B + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_{Z(s,t)}(B) + \sum_{k\geq 2}\frac{B_k}{k!}\mathrm{ad}^k_{Z(s,t)}(B)$$

On utilisera le résultat de la question 6 de la seconde partie.

Question 7 : En identifiant $Z(t,t)$ à $C(t)$, établir que $C(t)$ est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{C}(t) & = & A + B - \frac{1}{2}\mathrm{ad}_{C(t)}(A-B) + \sum_{k\geq 2}\frac{B_k}{k!}\mathrm{ad}^k_{C(t)}(A+B) \\ C(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Question 8 : En s'appuyant sur l'identité (que l'on justifiera) de Jacobi :

$$\forall (D_1, D_2, D_3) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{ad}_{D1}\left(\mathrm{ad}_{D_2}(D_3)\right) + \mathrm{ad}_{D3}\left(\mathrm{ad}_{D_1}(D_2)\right) + \mathrm{ad}_{D_2}\left(\mathrm{ad}_{D_3}(D_1)\right) = 0,$$

montrer que l'on a $C(t) = tC_1 + t^2C_2 + t^3C_3 + \mathcal{O}(t^4)$ avec

$$\begin{array}{lcl} C_1 & = & A + B, \\ C_2 & = & \frac{1}{2}\mathrm{ad}_A(B), \\ C_3 & = & \frac{1}{12}\left(\mathrm{ad}^2_A(B) + \mathrm{ad}^2_B(A)\right). \end{array}$$

On admettra que $t \mapsto C(t)$ est de classe $\mathcal{C}^4$ dans un voisinage ouvert de $t = 0$.

Quatrième Partie

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne commutent pas. On cherche maintenant à approcher $\exp(t(A+B))$ par un produit d'exponentielles de la forme

$$\psi_s(t) = \exp(ta_1 A)\exp(tb_1 B)\ldots\exp(ta_s A)\exp(tb_s B),$$

pour s un entier non nul et $(a_1,\ldots,a_s)$ et $(b_1,\ldots,b_s)$ des s-uplets de réels.

On dit alors que $\psi_s(t)$ est d'ordre p, si p est le plus grand entier non nul tel que $\psi_s(t) = \exp(t(A+B)) + \mathcal{O}(t^{p+1})$.

Question 1 : Montrer que $\exp(tA)\exp(tB)$ est d'ordre 1 et que $\exp(\frac{1}{2}tA)\exp(tB)\exp(\frac{1}{2}tA)$ est d'ordre au moins 2.

Question 2 : On suppose que pour $j = 1,\ldots,s$, $\psi_j(t) = \exp(tE_j(t))$ avec

$$E_j(t) = \alpha_j A + \beta_j B + \frac{t}{2}\gamma_j \mathrm{ad}_A(B) + \mathcal{O}(t^2)$$

Vérifier que $\alpha_1 = a_1$, $\beta_1 = b_1$ et $\gamma_1 = a_1 b_1$.

Question 3 : Montrer que pour $2 \leq j \leq s$, on a les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} (i) & \alpha_j & = & \alpha_{j-1} + a_j \\ (ii) & \beta_j & = & \beta_{j-1} + b_j \\ (iii) & \gamma_j & = & \gamma_{j-1} + a_j b_j + \alpha_{j-1} b_j - \beta_{j-1} a_j \end{array}$$

Question 4 : En déduire qu'on a les propositions suivantes :
- ψ_s est d'ordre au moins 1 si et seulement si $\sum_{j=1}^s a_j = 1$ et $\sum_{j=1}^s b_j = 1$
- ψ_s est d'ordre au moins 2 si et seulement si elle est d'ordre au moins 1 et $\sum_{j=1}^s b_j \sum_{i=1}^j a_i = \frac{1}{2}$

Question 5 : On suppose ici que pour un entier s non nul donné, l'approximation $\psi_s(t)$ est d'ordre p, et qu'on peut donc écrire :

$$\psi_s(t) = \exp(t\tilde{C}(t))$$

avec $\tilde{C}(t) = A + B + t^p C_{p+1} + \mathcal{O}(t^{p+1})$, où C_{p+1} est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de puissances de A et B, **que l'on n'explicitera pas**. On considère alors l'approximation suivante :

$$\phi(t) = \psi_s(\mu_1 t)\psi_s(\mu_2 t)\psi_s(\mu_3 t),$$

pour tout triplet (μ_1,μ_2,μ_3) de réels de somme 1 ($\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 1$). Montrer qu'on a alors

$$\phi(t) = \exp(t\tilde{D}(t))$$

avec $\tilde{D}(t) = A + B + t^p(\mu_1^{p+1} + \mu_2^{p+1} + \mu_3^{p+1})C_{p+1} + \mathcal{O}(t^{p+1})$.

Question 6 : Donner une condition suffisante pour que $\phi(t)$ soit d'ordre au moins $p+1$.

Question 7 : Montrer que si p est impair, alors la condition précédente ne peut être satisfaite. Montrer que si p est pair, il existe une solution avec $\mu_1 = \mu_3$.

Question 8 : On suppose en outre que $\psi_s(t)$ satisfait la relation suivante pour tout $|t|$ suffisamment petit :

$$(\psi_s(t))^{-1} = \psi_s(-t).$$

Montrer qu'alors p est pair et que pour la solution (μ_1, μ_2, μ_1) exhibée à la question précédente, on a également :

$$(\phi(t))^{-1} = \phi(-t).$$

Que peut-on dire de l'ordre de $\phi(t)$?

Question 9 : Expliciter une procédure permettant de construire une approximation de $\exp(t(A+B))$ de la forme de $\psi_s(t)$ d'ordre pair aussi grand que souhaité.