

Épreuve de Mathématiques – Sujet de Probabilités 2011

Le sujet 2011 consiste en une étude du processus des restaurants chinois (chinese restaurant process). Il s'agit d'un modèle de chaîne de Markov à valeurs dans les partitions, qui décrit l'évolution d'une population structurée en blocs. Les candidats semblent avoir tous bien compris les définitions et les objets mis en jeu dans ce sujet. Malgré la faiblesse de certaines réponses, la réaction à ce sujet est plutôt satisfaisante.

Partie I. Cette partie, consacrée à une première étude de la chaîne de Markov $(B_n)_n$ décrivant la population, avait pour but de rassurer les candidats. Elle a bien rempli son rôle, et a été traitée de manière satisfaisante par la plupart des candidats. Le concept de chaîne de Markov inhomogène semble avoir été bien compris la plupart du temps.

Partie II. Cette partie est consacrée à la loi de la partition aléatoire B_n ainsi qu'à ses blocs, connue sous le nom de formule d'échantillonnage d'Ewens. La question II.3, qui met en jeu un dénombrement, a rarement été traitée de manière satisfaisante.

Partie III. Cette partie est consacrée à l'étude du nombre de blocs $|B_n|$ de B_n . La question III.4 a révélé des faiblesses en analyse de certains candidats, ou a contrario, une certaine aisance. La question III.5, qui réclamait un petit effort d'imagination et de rédaction, a rarement été traitée correctement.

Partie IV. On étudie dans cette partie le nombre de blocs de taille n de B_n . Les questions V.3-4 ont rarement été traitées avec rigueur.

Partie V. Dans cette partie, on étudie le nombre de blocs de taille 1 de B_n . Beaucoup de candidats ont abordé cette partie. Les questions V.2-5 ont permis de tester les connaissances et l'aisance des candidats avec le concept d'espérance conditionnelle.

Partie VI. Cette partie est consacrée à la distance en variation totale sur l'ensemble des lois de probabilités sur \mathbb{N} ainsi qu'à une inégalité de Le Cam. La question VI.1 a été la plus visitée. Rares sont les candidats qui ont traité les questions VI.2-4 correctement. Les questions VI.5-7 ont été abordées par les meilleurs et quelques opportunistes.

Partie VII. Cette partie est consacrée à l'étude des fluctuations asymptotiques du nombre de blocs, sous forme d'un théorème de la limite centrale à vitesse logarithmique. Bien qu'accessible, cette partie n'a été abordée que par les meilleurs candidats, ainsi que par quelques autres, plus opportunistes. Aucun candidat n'a traité l'intégralité du sujet.