Solution abrégée du sujet de Probabilités, Cachan 3A 2011

Avertissement: Je tiens à préciser que je ne suis pas lié à l'École Normale Supérieure de Cachan; par suite les affirmations vraies ou fausses contenues dans ces pages ne sauraient engager l'École.

Olivier Garet, le 22 avril 2012

I

1. Par définition d'une partition, les éléments $b \in B$ sont deux à deux disjoints, donc la somme des cardinaux est le cardinal de la réunion, soit $|\{1, \dots, n\}| = n$.
2. À partir du groupe B au temps n, on peut créer un nouveau groupe avec probabilité $\frac{\theta}{\theta+n}$ (donné dans l'énoncé). Cela donne le deuxième cas de l'égalité proposée. Sinon, avec probabilité $1 - \frac{\theta}{\theta+n} = \frac{n}{\theta+n}$, $n+1$ rejoint un groupe existant. On sait que la probabilité de passer de B à B^{B+} est proportionnelle à $|b|$. Comme la somme de ces probabilités fait $\frac{\theta}{\theta+n}$, la probabilité cherchée est
$$\frac{|b|}{\sum_{b' \in B} |B'|} \frac{n}{\theta + n} = \frac{|b|}{n} \frac{n}{\theta + n} = \frac{|b|}{\theta + n},$$
ce qui est le premier cas de l'égalité proposé. Il n'y a pas d'autre issue, d'où le 0 des autres cas.
3. La chaîne est homogène, de matrice de passage
$$p_{B,B'} = \begin{cases} \frac{|b|}{\theta+n(B)} & \text{si } B = B^{b+} \text{ pour un } b \in B \\ \frac{\theta}{\theta+n(B)} & \text{si } B' = B \cup \{\{n+1\}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$
où on a posé $n(B) = \sum_{b' \in B} |B'|$. La loi initiale est la masse de Dirac en $\{\{1\}\}$.
4. Seul le grégarisme est possible: $B_n = \{\{1, \dots, n\}\}$ pour tout n.
5. Seul l'individualisme est possible: $B_n = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ pour tout n.
1. Pour $n = 1$, on a $\mathcal{B}_1 = \{\{\{1\}\}\}$. On a
$$\mathbb{P}(B_1 = \{1\}) = 1 = \frac{\theta^{|\{\{1\}\}|}}{\theta}(|\{1\}| - 1)!.$$
La formule est donc vérifiée pour $n = 1$. Soit maintenant $B' \in \mathcal{B}_{n+1}$. Par définition de la dynamique, il existe un seul B' tel que $\{B_{n+1} = B'\} \subset \{B_n = B\}$: on trouve B' à partir de B en enlevant $\{n+1\}$ dans l'ensemble qui le contient si celui-ci n'est pas un singleton, en enlevant ce singleton sinon. Il y a deux cas possibles

- Cas $B' = B \cup \{\{n+1\}\}$. Notons $B = \{e_1, \dots e_k\}$ et $e_{k+1} = \{n+1\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\mathbb{P}(B_n = B) = \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^k (|e_k|-1)!$, et donc

  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}(B_{n+1} = B') \\ = \ & \mathbb{P}(B_{n+1} = B', B_n = B) = \mathbb{P}(B_{n+1} = B' | B_n = B)\mathbb{P}(B_n = B) \\ = \ & \frac{\theta}{\theta+n} \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^k (|e_i|-1)! \\ = \ & \frac{\theta^{k+1}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n)} \prod_{i=1}^{k+1} (|e_i|-1)! \end{aligned}$$

  ce qui est la formule voulue.
- Cas $B = \{e_1, \dots, e_k\}$ et $B' = B^{e_k+}$ (on peut toujours numéroter les éléments de la sorte). D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\mathbb{P}(B_n = B) = \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^k (|e_k|-1)!$, et donc

  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}(B_{n+1} = B') \\ = \ & \mathbb{P}(B_{n+1} = B', B_n = B) = \mathbb{P}(B_{n+1} = B' | B_n = B)\mathbb{P}(B_n = B) \\ = \ & \frac{|e_k|}{\theta+n} \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^k (|e_i|-1)! \\ = \ & \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n)} \prod_{i=1}^{k-1} (|e_k|-1)! \times |e_k|! \\ = \ & \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n)} \prod_{i=1}^{k-1} (|e_k|-1)! \times (|e_k \cup \{n+1\}|-1)! \end{aligned}$$

  ce qui est encore la formule voulue.

Dans tous les cas on a la formule voulue: la propriété est donc bien héréditaire.

2. Pour $b \in B$, on pose $f(B) = |B|$. Pour i entre 1 et n, posons $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Les A_i sont deux à deux disjoints, de réunion B. Pour toute fonction g à valeurs réelles, on a

$$\sum_{b \in B} g(b) = \sum_{i=1}^n \sum_{b \in A_i} g(b).$$

En particulier, en prenant $g = f$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{b\in B} |b| &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{b\in A_i} |b| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{b\in A_i} i \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| i = \sum_{i=1}^{n} a_i i
\end{aligned}$$

On conclut avec I.1.

3. On peut faire opérer le groupe $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $X = X(a_1, \dots, X_n)$ des partitions à nombres $a_1, \dots, a_n$ prescrits: si $B = \{b_1, \dots, b_k\}$, on pose $\sigma.B = \{\sigma(b_1), \dots, \sigma(b_k)\}$. L'action est transitive: on écrit $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ et $B = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ en mettant d'abord les éléments de taille 1, puis ceux de taille 2,..., puis ceux de taille n. En mettant les deux listes l'une en dessous de l'autre, la permutation σ qui envoie chaque élément de $\{1, \dots, n\}$ noté sur la première ligne sur l'élément correspondant noté sur la deuxième vérifie $\sigma.B = B'$. Ainsi, pour tout $B \in X$, on a, avec le théorème du stabilisateur $|X| = |O_B| = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|S_B|}$, où O_b est l'orbite de B sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ et S_B le stabilisateur de B: $S_B = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma.B = B\}$.

   À $\sigma \in S_B$, on peut associer une permutation $\phi(\sigma)$ de B telle que si $b \in B$ et $x \in B$, $\phi(\sigma)$ envoie b sur l'unique $b' \in B$ qui contient $\sigma(x)$.

   On a ainsi construit un morphisme surjectif ϕ de S_B dans le groupe S'_B des permutations de B qui envoient chaque élément de B vers un élément de même cardinal, autrement dit qui laissent stables les A_i. Ainsi, S'_B est isomorphe à $\mathfrak{S}_{a_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{a_n}$. Le noyau de ϕ est constitué des permutations σ qui laissent stable chaque $b \in B$. Il est donc isomorphe à $\prod_{b\in B} \mathfrak{S}(b)$.

   Ainsi, comme $|S'_B| = |\text{Im } \phi| = |S_B/\text{ker } \phi| = \frac{|S_B|}{|\text{ker } \phi|}$, et

$$|X| = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|S_B|} = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|S'_B|.|\text{ker } \phi|} = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\mathfrak{S}_{a_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{a_n}|.|\prod_{b\in B} \mathfrak{S}(b)|}$$

   On a $|\mathfrak{S}_n| = n!$, $|\mathfrak{S}_{a_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{a_n}| = \prod_{i=1}^{n} a_i!$ et

$$|\prod_{b\in B} \mathfrak{S}(b)| = \prod_{b\in B} |b|! = \prod_{i=1}^{n} \prod_{b\in A_i} |b|! = \prod_{i=1}^{n} i^{a_i},$$

   ce qui donne le résultat voulu.

4.

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(C_{n,1}=a_1,\dots,C_{n,n}=a_n) \\
= \; & \mathbb{P}(B_n \in X(a_1,\dots,a_n) = \sum_{b\in X(a_1,\dots,a_n)} \mathbb{P}(B_n=b) \\
= \; & \sum_{b\in X(a_1,\dots,a_n)} \frac{1}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{b\in B} \theta(|b|-1)! \\
= \; & \sum_{b\in X(a_1,\dots,a_n)} \frac{1}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^{n} \prod_{b\in A_i} \theta(|b|-1)! \\
= \; & \sum_{b\in X(a_1,\dots,a_n)} \frac{1}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^{n} \prod_{b\in A_i} \theta(i-1)! \\
= \; & \sum_{b\in X(a_1,\dots,a_n)} \frac{1}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^{n} \theta^{a_i}((i-1)!)^{a_i} \\
= \; & \frac{|X(a_1,\dots,a_n)|}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \prod_{i=1}^{n} \theta^{a_i}((i-1)!)^{a_i},
\end{aligned}
$$

ce qui avec II.3 donne l'expression demandée.

5. Notons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $B_1,\dots B_n$ et $\mathcal{G}_n$ la tribu engendrée par $C_1,\dots C_n$. On peut remarquer que $C_{n+1}-C_n=\delta_{k+1}-\delta_k$ si $n+1$ vient rejoindre un groupe de taille k. Ainsi, en utilisant les formules trouvées aux I.2 et I.3, on a

$$\mathbb{P}(C_{n+1}-C_n=\delta_{k+1}-\delta_k|\mathcal{F}_n)=\frac{k}{n+\theta}C_{n,k}$$

De même

$$\mathbb{P}(C_{n+1}-C_n=\delta_1|\mathcal{F}_n)=\frac{\theta}{n+\theta}.$$

Les autres changements sont de probabilité nulle. Comme $\mathcal{G}_n$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_n$ et que $C_{n,k}$ est $\mathcal{G}_n$-mesurable, on a encore

$$\mathbb{P}(C_{n+1}-C_n=\delta_{k+1}-\delta_k|\mathcal{G}_n)=\frac{k}{n+\theta}C_{n,k}$$

et

$$\mathbb{P}(C_{n+1}-C_n=\delta_1|\mathcal{G}_n)=\frac{\theta}{n+\theta}.$$

Les autres changements sont de probabilité nulle. (C_n) est donc bien une chaîne de Markov à valeur dans l'ensemble des suites finies d'entiers $a_1,\dots a_n$ avec $\sum_i ia_i=n$. Comme n peut se retrouver à partir de la suite, il est étonnant que l'énoncé la considère comme non-homogène, alors que le choix inverse a été fait au I.3.

III

1. Par définition de la dynamique, si je note
$$E_{n+1} = \{n+1 \text{ crée un nouveau groupe}\},$$
alors $|B_{n+1}| - |B_n| = 1\!\!1_{E_{n+1}}$ et l'événement E_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$. Ainsi $1\!\!1_{\{|B_{n+1}|=k\}} = 1\!\!1_{\{|B_n|=k\}} 1\!\!1_{E^c_{n+1}} + 1\!\!1_{\{|B_n|=k-1\}} 1\!\!1_{E_{n+1}}$ et
$$\mathbb{P}(|B_{n+1}| = k|\mathcal{F}_n) = \frac{n}{n+\theta} 1\!\!1_{\{|B_n|=k\}} + \frac{\theta}{n+\theta} 1\!\!1_{\{|B_n|=k-1\}}$$
Il est alors clair que $(|B_n|)_n$ est une chaîne de Markov inhomogène.

2. On a l'identité voulue avec $\xi_n = 1\!\!1_{E_n}$. $\xi_1, \dots \xi_n$ sont $\mathcal{F}_n$ mesurables, or ξ_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, donc les ξ_n sont indépendantes. Bien sûr ξ_k est une variable de Bernoulli et $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = \mathbb{P}(E_k) = \frac{\theta}{\theta+k-1}$

3. $|B_n| = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{k+1}$, donc par linéarité , $\mathbb{E}|B_n| = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\xi_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta+k}$ et comme les variables sont indépendantes,
$$\text{Var } |B_n| = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var } \xi_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta+k}\left(1 - \frac{\theta}{\theta+k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\theta k}{(\theta+k)^2}$$
On peut supprimer le premier terme qui est nul.
$$\mathbb{E}[|B_{n+1}||\mathcal{F}_n] = |B_n| + \mathbb{P}(E_{n+1}).$$
L'expression trouvée est $\sigma(|B_1|, \dots, |B_n|)$-mesurable, donc
$$\mathbb{E}[|B_{n+1}||\sigma(|B_1|, \dots, |B_n|)] = |B_n| + \mathbb{P}(E_{n+1}).$$
On n'aura une martingale que si $\mathbb{P}(E_{n+1}) = 0$ pour tout n, c'est à dire si $\theta = 0$.

4. Fixons $\theta > 0$. On a lorsque k tend vers l'infini
$$\log(k+1) - \log(k) = \log(1 + 1/k) \sim \frac{1}{k} \sim \frac{1}{\theta+k} \sim \frac{k}{(\theta+k)^2}$$
Ces suites sont positives et les séries correspondantes sont divergentes, donc les sommes partielles sont équivalentes. Comme la première somme est télescopique, cela donne les équivalents demandés.

5. $$\left\|\frac{|B_n| - \mathbb{E}|B_n|}{\log n}\right\|_2 = \frac{1}{(\log n)^2} \text{Var } |B_n| \sim \frac{\theta}{\log n},$$
donc $\frac{|B_n| - \mathbb{E}|B_n|}{\log n}$ tend vers 0 dans L^2. Avec l'inégalité triangulaire
$$\left\|\frac{|B_n|}{\log n} - \theta\right\|_2 \leq \left\|\frac{|B_n| - \mathbb{E}|B_n|}{\log n}\right\|_2 + \left|\frac{\mathbb{E}|B_n|}{\log n} - \theta\right|,$$
donc $\frac{|B_n|}{\log n}$ tend dans L^2 vers θ. Comme la convergence dans L^2 entraîne la convergence en probabilité, le résultat s'ensuit.

IV

1. l'identité $n = C_{n,1} + 2C_{n,2} + \dots nC_{n,n}$ nous donne que si $C_{n,n} \geq 1$, alors $C_{n,n} = 1$ et $C_{n,k} = 0$ pour $k < n$, ce qui entraîne $|B_n| = 1$. Ainsi $C_{n,n}$ vaut 0 ou 1 et s'il vaut 1, $|B_n| = 1$. Réciproquement, si $|B_n| = 1$, il n'y a qu'un seul bloc, donc sa taille est tout l'effectif: n et on a alors $C_{n,n} = 1$.

2. Pour n'avoir qu'un seul bloc, il faut et il suffit de ne jamais avoir eu de création.
$$\{C_{n,n} = 1\} = \cap_{k=2}^{n} E_k^c = \cap_{k=1}^{n-1} \{\xi_{k+1} = 0\}.$$
Comme les variables sont indépendantes, on a
$$\mathbb{P}(C_{n,n} = 1) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\theta + k}$$

3. $$-\log \mathbb{P}(C_{n,n} = 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \log(1 + \theta/k).$$
Comme $\log(1+\theta/k) \sim \theta/k$, la série de terme général $\log(1+\theta/k)$ diverge, donc $\lim_{n\to+\infty} -\log \mathbb{P}(C_{n,n} = 1) = +\infty$, et en composant avec $x \mapsto \exp(-x)$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{n,n} = 1) = 0$.

4. Dès que $C_{n,n}$ est nul, il le reste car $C_{n,n}$ est non-nul si et seulement si il y a plus d'un bloc et le nombre de blocs est croissant. Ainsi, le complémentaire de l'événement "$C_{n,n} = 0$ à partir d'un certain rang" est l'événement "$C_{n,n} = 1$ pour tout n". Notons E cet événement: on a pour tout n $E \subset \{C_{n,n} = 1\}$, donc $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(C_{n,n} = 1)$, et en faisant tendre n vers l'infini, on a $\mathbb{P}(E) \leq 0$, donc $\mathbb{P}(E) = 0$, ce que l'on voulait.

V

1. Quand une nouvelle particule arrive, elle peut créer un nouveau bloc de taille, en détruire un si elle vient se coller à un bloc existant de taille au moins 2, où en détruire 1 si elle vient se coller à un bloc de taille 1. $C_{n+1,1} - C_{n,1}$ ne peut donc valoir que $-1, 0$ ou 1, et on a
$$\mathbb{P}(C_{n+1,1} - C_{n,1} = 1|\mathcal{F}_n) = \frac{\theta}{\theta + n} \text{ et } \mathbb{P}(C_{n+1,1} - C_{n,1} = 1|\mathcal{F}_n) = C_{n,1}\frac{1}{\theta + n}.$$
On procède alors comme en II.5 pour voir qu'on a une chaîne de Markov et on a aisément les formules annoncées.

2. D'après ce qui précède
$$\mathbb{E}[C_{n+1,1} - C_{n,1}|\mathcal{F}_n] = \frac{\theta}{\theta + n} - \frac{C_{n,1}}{\theta + n},$$

d'où, comme $C_{n,1}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_{n+1,1}|\mathcal{F}_n] &= C_{n,1} + \frac{\theta}{\theta+n} - \frac{C_{n,1}}{\theta+n} \\ &= \frac{C_{n,1}(\theta+n-1)+\theta}{\theta+n}\end{aligned}$$

Comme $\sigma(C_{n,1})$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_n$, on a encore

$$\mathbb{E}[C_{n+1,1}|C_{n,1}] = \frac{C_{n,1}(\theta+n-1)+\theta}{\theta+n},$$

ce qui est la formule voulue.

3. En réintégrant, on a

$$\mathbb{E}[C_{n+1,1}] = \frac{\mathbb{E}[C_{n,1}](\theta+n-1)+\theta}{\theta+n},$$

Comme $C_{1,1} = 1$, on a $\mathbb{E}[C_{n+1,1}] = 1$, et la formule $\mathbb{E}[C_{n,1}] = \frac{n\theta}{n+\theta-1}$ se démontre alors par une récurrence immédiate.

4. $(X - \mathbb{E}[X|Y])^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[X|Y]^2$. Comme $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[X|Y]^2$ sont $\sigma(Y)$-mesurables, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])^2|Y] &= \mathbb{E}[(X^2 - 2X\mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[X|Y]^2)|Y] \\ &= \mathbb{E}[X^2|Y] - 2\mathbb{E}[X|Y]\mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[X|Y]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2|Y] - \mathbb{E}[X|Y]^2 = \text{Var }(X|Y)\end{aligned}$$

Ainsi Var $(X|Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])^2|Y] \geq 0$, car l'espérance conditionnelle d'une variable positive est une variable positive. Reprenant la définition de Var $(X|Y)$, on a

$$\mathbb{E}[\text{Var }(X|Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|Y]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]^2].$$

Par ailleurs, par définition de la variance

$$\text{Var }\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X|Y]^2) - (\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)])^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X|Y]^2) - E[X]^2.$$

En additionnant les deux lignes,

$$\mathbb{E}[\text{Var }(X|Y)] + \mathbb{E}[\text{Var }(X|Y)] = \mathbb{E}[X^2] - E[X]^2 = \text{Var } X.$$

5. $(C_{n+1,1} - C_{n,1})^2$ ne peut valoir que 0 ou 1. Il vaut 1 si il y a destruction ou création d'un groupe de 1. En procédant comme précédemment, on a

$$\mathbb{E}[(C_{n+1,1} - C_{n,1})^2|\mathcal{F}_n] = \frac{C_{n,1}+\theta}{n+\theta}.$$

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}[C^2_{n+1,1}|C_{n,1}] \\
= \;& C^2_{n,1} + 2C_{n,1}\mathbb{E}[C_{n+1,1} - C_{n,1}|C_n] + \mathbb{E}[(C_{n+1,1} - C_{n,1})^2|C_{n,1}] \\
= \;& C^2_{n,1} + 2C_{n,1}\frac{\theta - C_{n,1}}{\theta + n} + \frac{C_{n,1} + \theta}{n + \theta} \\
= \;& \frac{n - 2 + \theta}{n + \theta}C^2_{n,1} + \frac{2\theta + 1}{n + \theta}C_{n,1} + \frac{\theta}{n + \theta}
\end{aligned}
$$

En posant $Y_n = (n + \theta - 1)C_{n,1}$, j'obtiens

$$\mathbb{E}[Y^2_{n+1}|C_{n,1}] = (n + \theta)(n - 2 + \theta)C^2_{n,1} + (n + \theta)(2\theta + 1)C_{n,1} + \theta(n + \theta)$$

ou encore

$$\mathbb{E}[Y^2_{n+1}|C_{n,1}] = \frac{(n + \theta)(n - 2 + \theta)}{(n + \theta - 1)^2}Y^2_n + \frac{(n + \theta)(2\theta + 1)}{n + \theta - 1}Y_n + \theta(n + \theta)$$

Comme $\mathbb{E}[Y_{n+1}|C_{n,1}] = Y_n + \theta$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \text{Var }[Y_{n+1}|C_{n,1}] \\
= \;& \left(\frac{(n + \theta)(n - 2 + \theta)}{(n + \theta - 1)^2} - 1\right)Y^2_n + \left(\frac{(n + \theta)(2\theta + 1)}{n + \theta - 1} - 2\theta\right)Y_n + \theta n \\
= \;& -\frac{1}{(n + \theta - 1)^2}Y^2_n + \frac{n + 3\theta}{n + \theta - 1}Y_n + n\theta
\end{aligned}
$$

Comme $\mathbb{E}Y_n = n\theta$, on a alors

$$\mathbb{E}[\text{Var }[Y_{n+1}|C_{n,1}]] = -\frac{1}{(n + \theta - 1)^2}(\text{Var }Y_n + n^2\theta^2) + \left(\frac{n + 3\theta}{n + \theta - 1} + 1\right)n\theta$$

Enfin

$$
\begin{aligned}
& \text{Var }Y_{n+1} \\
= \;& \mathbb{E}[\text{Var }[Y_{n+1}|C_{n,1}] + \text{Var }[\mathbb{E}[Y_{n+1}|C_{n,1}] \\
= \;& \mathbb{E}[\text{Var }[Y_{n+1}|C_{n,1}] + \text{Var }(Y_n + n\theta) \\
= \;& \mathbb{E}[\text{Var }[Y_{n+1}|C_{n,1}] + \text{Var }Y_n \\
= \;& \left(1 - \frac{1}{(n + \theta - 1)^2}\right)\text{Var }Y_n + \left(-\frac{n\theta}{(n + \theta - 1)^2} + \frac{n + 3\theta}{n + \theta - 1} + 1\right)n\theta \\
= \;& \left(\frac{(n + \theta - 2)(n + \theta)}{(n + \theta - 1)^2}\right)\text{Var }Y_n + \left(-\frac{n\theta}{(n + \theta - 1)^2} + \frac{n + 3\theta}{n + \theta - 1} + 1\right)n\theta
\end{aligned}
$$

Ainsi en posant $u_n = \theta^{-1}\frac{n+\theta-2}{n+\theta-1}\text{Var }Y_n$, on a la récurrence

$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{n\theta}{n + \theta - 1} + 2n + 4\theta - 1\right)\frac{n}{n + \theta}$$

Avec un peu de courage et en espérant ne pas avoir fait d'erreur, on doit pouvoir montrer alors par récurrence que $u_n = \frac{n(n-1)(n-2+2\theta)}{n+\theta-1}$. Plus simplement, on peut remarquer que $u_{n+1} - u_n \sim 2n$, ce qui entraîne $u_n \sim n^2$, d'où Var $C_{n,1} \sim \theta$, ce qui est sans doute suffisant pour la suite.

[Edit: finalement le résultat ne sert pas. Quoi ? Tous ces calculs pour rien !]

VI

1. On remarque que $-1 \leq \mu(A) - \nu(A) \leq 1$ quel que soit A, ce qui assure que $0 \leq d_V(\mu,\nu) \leq 1 < +\infty$. Que d_V sépare les points est immédiat: si le sup est nul $|\mu(A) - \mu(A)| = 0$ pour tout A et sonc $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout A. Reste à montrer l'inégalité triangulaire: on a quels que soient μ, ν, γ

$$|\mu(A) - \gamma(A)| \leq |\mu(A) - \nu(A)| + |\nu(A) - \gamma(A)| \leq d_V(\mu,\nu) + d_v(\nu,\gamma)$$

   En passant au supremum, on obtient $d_V(\mu,\gamma) \leq d_V(\mu,\nu) + d_v(\nu,\gamma)$. d_V est donc bien une distance.

2. Sans indication, la question demande un peu d'astuce. Nous allons répondre en même temps aux questions 2 et 3.

   Lemme 1. *Pour $u \in \ell^1(\mathbb{N})$, on a*

$$\|u\|_1 = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \sum_{x\in\mathbb{N}} u_x f(x),$$

   où le supremum est pris sur toutes les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $[-1,1]$.

   Proof. Soit f une fonction bornée par 1: on a

$$|\sum_{x\in\mathbb{N}} u_x f(x)| \leq \sum_{x\in\mathbb{N}} |u_x||f(x)| \leq \sum_{x\in\mathbb{N}} |u_x|.1 = \|u\|_1,$$

   et l'égalité est atteinte si l'on pose $f(x) = \frac{|u_x|}{u_x}$ si $u_x \neq 0$, $f(x) = 0$ sinon. □

   Corollaire 1. *Quelques soient les mesures de probabilité μ,ν sur $\mathbb{N}$, on a*

$$\sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\int f\ d\mu - \int f\ d\nu| = \|\mu - \nu\|_1$$

   Proof. Il suffit de noter que

$$\int f\ d\mu - \int f\ d\nu = \sum_{x\in\mathbb{N}} f(x)(\mu(x) - \nu(x))$$

   et appliquer le lemme. □

Théorème 1. *Quelques soient les probabilités μ,ν sur $\mathbb{N}$, on a*

$$d(\mu,\nu) = \frac{1}{2} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\int f\ d\mu - \int f\ d\nu| = \frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_1$$

Proof. Soit E un événement. Posons $f = 1\!\!1_E - 1\!\!1_{E^c}$. Notons que $\|f\|_\infty \leq 1$. On remarque que $\int f\ d\mu = \mu(E) - \mu(E^c) = 2\mu(E) - 1$. De même pour ν, d'où

$$|\mu(E)-\nu(E)| = \frac{1}{2}|\int f\ d\mu - \int f\ d\nu| = \frac{1}{2}|\sum_{x\in X} f(x)(\mu(x)-\nu(x)| \leq \frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_1,$$

ce qui nous donne en passant au supremum $d(\mu,\nu) \leq \frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_1$. D'autre part, on remarque que si l'on prend $E = \{x \in X; \mu(x) \geq \nu(x)\}$, on a $f(x)(\mu(x)-\nu(x)) = |\mu(x)-\nu(x)|$ et on a donc $|\mu(E)-\nu(E)| = \frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_1$, ce qui nous donne l'inégalité inverse. □

3. Déjà répondu.

4. La convergence en loi est la convergence des intégrales des fonctions continues bornées. Comme sur $\mathbb{N}$, qui est discret, toutes les fonctions sont continues, (a) entraîne (b) en prenant $f = 1\!\!1_k$. Il est facile de voir que $|\int f\ d\mu - \int f\ d\nu| \leq \|f\|_\infty d_V(\mu,\nu)$, ce qui fait que (c) entraîne (a). Reste le gros morceau, voir que (b) entraîne (c). Pour tout x réel $|x| = 2x^+ - x$. En particulier $|\mu(k) - \mu_n(k)| = 2(\mu(k) - \mu_n(k))^+ - \mu(k) + \mu_n(k)$. En sommant sur k dans $\mathbb{N}$, on obtient

$$2\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(k) - \mu_n(k)| = 2\sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu(k) - \mu_n(k))^+,$$

soit

$$d_V(\mu,\mu_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu(k) - \mu_n(k))^+.$$

Comme $0 \leq (\mu(k)-\mu_n(k))^+ \leq \mu(k)$, et que $\sum \mu(k) = 1 < +\infty$, le résultat vient du théorème de convergence dominée pour les fonctions intégrables par rapport à la mesure de comptage.

5. $\xi(k) = 0$ pour $k \geq 2$, donc en appliquant l'expression trouvée dans la question précédente

$$\begin{aligned} d_V(\xi,P) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (\xi(k) - P(k))^+ \\ &= \sum_{k=0}^{1} (\xi(k) - P(k))^+ = (1-p-e^{-p})^+ + (p - pe^{-p})^+. \end{aligned}$$

On a sans difficulté $1-p \le e^{-p} \le 1$, d'où

$$\begin{aligned}(1-p-e^{-p})^+ + (p-pe^{-p})^+ &= 1-p-e^{-p}+p-pe^{-p} \\ &= 1-e^{-p}-pe^{-p} = 1-(1+p)e^{-p} \\ &\le 1-(1+p)(1-p) = p^2.\end{aligned}$$

6. Soient X, Y, Z indépendantes, f avec $\|f\|_\infty \le 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X+Z)-f(Y+Z)] &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[(f(X+Z)-f(Y+Z))1\!\!1_{\{Z=K\}}] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[(f(X+k)-f(Y+k))1\!\!1_{\{Z=K\}}] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[f(X+k)-f(Y+k)]\mathbb{P}(Z=k) \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} 2d_V(X,Y)\mathbb{P}(Z=k) \\ &= 2d_V(X,Y)\end{aligned}$$

D'où en passant au suprémum $d_V(X+Z, Y+Z) \le d_V(X,Y)$. Maintenant

$$\begin{aligned}d_V(X_1+X_2, Y_1+Y_2) &\le d_V(X_1+X_2, Y_1+X_2) + d_V(Y_1+X_2, Y_1+Y_2) \\ &\le d(X_1,Y_1) + d(X_2,Y_2).\end{aligned}$$

On conclut par récurrence.

7. C'est une conséquence immédiate de la question précédente et du fait que la convolée de lois de Poisson est une loi de Poisson ayant pour paramètre la somme des paramètres.

VII

1. Grâce à la partie III, on peut appliquer l'inégalité (**) améliorée avec $p_k = \frac{\theta}{\theta+k-1}$.

$$d_V(|B_n|, P_n) \le (1-\exp(-(p_1+\cdots+p_n)))\frac{p_1^2+\cdots+p_n^2}{p_1+\cdots+p_n} \le \frac{1+\pi^2/6}{p_1+\cdots+p_n}$$

Comme la série des p_k diverge, le résultat s'ensuit.

2. On pose $g(x) = f(\frac{x-\lambda_n}{\sigma_n})/\|f\|_\infty$. D'après VI.3 $|\mathbb{E}g(|B_n|) - \mathbb{E}g(P_n)| \le 2d_V(|B_n|, P_n)$, on multiplie par $\|f\|_\infty$ et on a le résultat voulu.

3. Calculons la fonction caractéristique de $\frac{P_n-\lambda}{\sigma_n}$:

$$\mathbb{E}[e^{it\frac{P_n-\lambda_n}{\sigma_n}}] = e^{-it\lambda_n/\sigma_n}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^k}{k!}e^{itk/\sigma_n} = \exp(-it\frac{\lambda_n}{\sigma_n} - \lambda_n + \lambda_n e^{i\frac{t}{\sigma_n}}).$$

$$-it\frac{\lambda_n}{\sigma_n} - \lambda_n + \lambda_n e^{i\frac{t}{\sigma_n}} = \lambda_n(e^{it/\sigma_n} - 1 - it/\sigma_n)$$

Comme en 0, $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, on a

$$e^{it/\sigma_n} - 1 - it/\sigma_n \sim (it/\sigma_n)^2/2 = -\frac{t^2}{2\sigma_n^2},$$

donc $-it\frac{\lambda_n}{\sigma_n} - \lambda_n + \lambda_n e^{i\frac{t}{\sigma_n}}$ est équivalent à $-\frac{\lambda_n t^2}{2\sigma_n^2}$, et donc converge vers $-t^2/2$. Par continuité, la fonction caractéristique de $\frac{P_n-\lambda}{\sigma_n}$ converge en tout point vers $t \mapsto e^{-t^2/2}$. On reconnait la fonction caractéristique de la loi gaussienne centrée réduite, ce qui donne la convergence voulue par le théorème de Levy.

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et f continue bornée sur $\mathbb{R}$. Avec VII.2 et l'inégalité triangulaire, on a

$$|\mathbb{E}[f(\frac{|B_n| - \lambda_n}{\sigma_n})] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq 2\|f\|_\infty d_V(|B_n|, P_n) + |\mathbb{E}[f(\frac{P_n - \lambda_n}{\sigma_n})] - \mathbb{E}[f(X)]|$$

Le premier terme de la somme tend vers 0 grâce à VII.1, le second grâce à VII.3. Ainsi, le terme de gauche tend vers 0 pour tout fonction continue bornée: on a montré la convergence en loi.

5. Le vecteur aléatoire (X_n, a_n, b_n) converge en loi vers le vecteur aléatoire (X, a, b) (regarder par exemple la fonction caractéristique). Comme la fonction $(x, a, b) \mapsto ax + b$ est continue, $a_n X_n + b_n$ converge en loi vers $aX + b$.

6. On applique le résultat précédent avec $a_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{\theta \log n}}$ et $b_n = \frac{\lambda_n - \theta \log n}{\sqrt{\theta \log n}}$. a_n tend vers 1 d'après III.4. On raffine le raisonnement de III.4: comme $\frac{\theta}{\theta+k} - \theta\log(1+1/k) = O(k^{-2})$, on obtient en sommant $\lambda_n = \theta \log n + O(1)$, d'où la convergence de b_n vers 0, ce qui donne le résultat voulu.

7. Soit A avec $\mathbb{P}(|X| \leq A) > 1 - \alpha$. Pour n assez grand, avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, on a $\theta \log n \in [|B_n| - A\sqrt{\theta \log n}, |B_n| + A\sqrt{\theta \log n}]$, et donc $\theta \in [|B_n|/\log n - A\sqrt{\theta/\log n}, |B_n|/\log n + A\sqrt{\theta \log n}]$ et donc

$$\theta \in [\frac{|B_n|}{\log n} - \frac{A}{\sqrt{\log n}}, \frac{|B_n|}{\log n} + \frac{A}{\sqrt{\log n}}]$$

C'est l'intervalle de confiance asymptotique cherché.

FIN