Rapport sur l'épreuve de Mathématiques I.

Le problème portait sur diverses propriétés des séries de Dirichlet. Il introduisait notamment plusieurs abscisses de convergence associées à une série de Dirichlet et établissait des inégalités entre ces abscisses. Il mêlait utilisation des théorèmes classiques sur les séries, analyse fonctionnelle et analyse complexe. Dans l'ensemble, les copies se sont révélées d'un bon niveau, même si l'on peut regrettait un manque de pratique manifeste des techniques de base de l'analyse.
La partie I commençait par l'étude de l'abscisse de convergence de quelques séries de Dirichlet. Si les premiers exemples ont bien été traités (parfois, la justification apportée par les candidats ne prouvait qu'une inégalité), le dernier s'est révélé très discriminant. Le fait que $A_a(f)$ était un intervalle illimité à droite ne posait pas de problèmes, mais quelques candidats ont cru pouvoir déduire cela de l'inclusion $A_c(f) \subset A_a(f)$. La même propriété pour $A_c(f)$ a été traitée correctement dans une petite moitié de copies. L'inégalité $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$, qui nécessitait de jouer avec la définition de la borne inférieure, a été justifiée par deux tiers des candidats.
La suite de la partie I établissait le lien entre l'abscisse de convergence et la convergence de la série dans le plan complexe. La question I.B.1., qui ne posait pas de difficultés particulières, a été massivement traitée. En revanche, pour la question I.B.2., il semble que peu de candidats savent qu'étudier la convergence uniforme d'une série, c'est prouver la convergence uniforme des restes vers zéro. La fin de la partie a été correctement traitée, à l'aide du rappel.
La partie II.A. commençait par démontrer un lemme de Kronecker, dont la preuve, bien que élémentaire, est relativement technique. Moins de dix candidats savent traiter la question II.A.1., et seules deux copies ont donné une réponse argumentée à la fin de la question (ouverte) II.A.3. La partie II continuait par l'étude de quelques propriétés formelles sur les séries de Dirichlet. Ces questions ont été correctement résolues, à l'exception de la question II.B.2. qui nécessitait l'utilisation d'un théorème de permutation somme/limite. La question II.C.4., qui nécessitait l'utilisation de plusieurs résultats antérieurs, a été fortement valorisée. La partie II.D., axée sur l'analyse fonctionnelle, a été peu abordée, alors que plusieurs questions, notamment II.D.1., étaient indépendantes du travail précédent.
Dans la partie III, les candidats ont reconnu les questions qui consistaient à appliquer la formule de Cauchy pour une fonction holomorphe. Le reste de la partie a été très peu abordé.