Solution partielle du sujet de Mathématiques Générales, Cachan 3A 2010 (parties I et II)

Avertissement: Je tiens à préciser que je ne suis pas lié à l'École Normale Supérieure de Cachan; par suite les affirmations vraies ou fausses contenues dans ces pages ne sauraient engager l'École.

Olivier Garet, le 12 janvier 2011, révisé le 29 janvier 2013

I Abscisse de convergence; abscisse de convergence absolue

I.A.1 Avant de commencer, on peut remarquer que si $\overline{f}(s) = \sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-s}$, on a $\sigma_a(\overline{f}) = \sigma_c(|f|)$ et qu'il y a égalité si (a_n) est à termes positifs.

- $n!n^s$
  Soit $s \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit k un entier avec $k > s$. Pour $n \geq k$, on a $n! \geq n(n-1)\dots(n-k+1) \geq (n-k+1)^k$, d'où $n!n^{-s} \geq \frac{(n-k+1)^k}{n^s}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} n!n^{-s} = +\infty$: la série est trivialement divergente: $A_c(f) = A_a(f) = \varnothing$ et donc $\sigma_a(f) = \sigma_c(f) = +\infty$.
- $\frac{n^{-s}}{n!}$.
  Soit $s \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit k un entier avec $k \geq -s$. Pour $n \geq k$, on a
  $$\frac{n^{-s}}{n!} \leq \frac{n^k}{n!} = \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!} \sim \frac{1}{(n-k)!}$$
  qui est le terme général d'une série convergente à termes positifs: ainsi $A_c(f) = A_a(f) = \mathbb{R}$ et donc $\sigma_a(f) = \sigma_c(f) = -\infty$.
- n^{-s}
  Le critère dit "de Riemann" dit que $A_c(f) = A_a(f) =]1, +\infty[$ et donc $\sigma_a(f) = \sigma_c(f) = 1$.
- $(-1)^n n^{-s}$
  D'après ce qui précède $\sigma_a(f) = 1$. Pour $s \leq 0$, la série est trivialement divergente. Pour $s < 0$, la série converge grâce au critère spécial des séries alternées à valeur absolue décroissante. Ainsi $A_c(f) =]0, +\infty[$, et $\sigma_c(f) = 0$.
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} n^{-s}$
  On peut réécrire $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} n^{-s} = \frac{(-1)^n}{n^{s+1/2}+(-1)^n n^s}$. La valeur absolue est $\frac{1}{n^{s+1/2}+(-1)^n n^s} \sim \frac{1}{n^{s+1/2}}$. La série converge si et seulement si $s + 1/2 > 1$, soit $s > 1/2$. On a donc
  $$A_a(f) =]1/2, +\infty[, \text{ et } \sigma_a(f) = 1/2.$$

Passons au calcul de l'abscisse de convergence: si $s \leq -1/2$, la série diverge trivialement. Posons donc $s = -1/2 + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$: un calcul élémentaire donne

$$\frac{(-1)^n}{n^\varepsilon + (-1)^n n^{\varepsilon-1/2}} = \frac{(-1)^n}{n^\varepsilon} - \frac{1}{n^{\varepsilon+1/2} + (-1)^n n^\varepsilon}.$$

La première série de la somme de droite converge pour tout $\varepsilon > 0$ donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\varepsilon+(-1)^n n^{\varepsilon-1/2}}$ est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{n^{\varepsilon+1/2}+(-1)^n n^\varepsilon} \sim \frac{1}{n^{\varepsilon+1/2}}$: elle converge si et seulement si $\varepsilon + 1/2 > 1$, soit $\varepsilon > 1/2$ ou $s > 0$. Finalement $A_c(f) =]0, +\infty[$, et $\sigma_c(f) = 0$.

I.A.2 Montrons que $A_c(f)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ illimité à droite. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $x > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x} \text{ converge}\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{x+\varepsilon}} \text{ converge}\right).$$

Soit x tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ converge. On pose $R_n = \sum_{k\geq n} \frac{a_k}{n^x}$ et $R'_n = \sup_{k\geq n} |R_k|$. Comme la série converge R'_n est de limite nulle.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{k^{x+\varepsilon}} &= \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^\varepsilon} (R_k - R_{k+1}) \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^\varepsilon} R_k - \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \frac{1}{(k-1)^\varepsilon} R_k \\
&= \frac{R_n}{n^\varepsilon} - \frac{R_{n+p}}{(n+p)^\varepsilon} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{(k-1)^\varepsilon} - \frac{1}{k^\varepsilon}\right) R_k
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité

$$|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{k^{x+\varepsilon}}| \leq \frac{R'_n}{|n^\varepsilon|} + \frac{R'_n}{|(n+p)^\varepsilon|} + R'_n \sum_{k=n}^{+\infty} \left|\frac{1}{k^\varepsilon} - \frac{1}{(k+1)^\varepsilon}\right| \quad (1)$$

Pour l'instant, on n'a pas utilisé que $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En réalité, l'inégalité est encore vraie pour $x, \varepsilon \in \mathbb{C}$ quelconques. On la réutilisera dans la suite. Mais ici, comme $\varepsilon > 0$, on a $|\frac{1}{k^\varepsilon} - \frac{1}{(k+1)^\varepsilon}| = \frac{1}{k^\varepsilon} - \frac{1}{(k+1)^\varepsilon}$ et

$$|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{k^{x+\varepsilon}}| \leq \frac{R'_n}{n^\varepsilon} + \frac{R'_n}{(n+p)^\varepsilon} + \frac{R'_n}{n^\varepsilon} \leq \frac{3R'_n}{n^\varepsilon}.$$

Ainsi, le critère de Cauchy est vérifié [1], donc la série converge bien. Ainsi $A_c(f)$ est un intervalle non borné à droite de $\mathbb{R}$, et $A_a(f)$ aussi puisque $A_a(f) = A_c(\overline{f})$.

[1] il est même uniforme en $\varepsilon \geq 0$, car $\frac{3R'_n}{n^\varepsilon} \leq 3R'_n$, ce qui fait que f est continue sur $[x, +\infty[$, mais n'anticipons pas

I.A.3 On a évidemment $A_a(f) \subset A_c(f)$, donc $\sigma_a(f) \geq \sigma_c(f)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in A_c(f)$, avec $x \leq \sigma_c(f) + \varepsilon$. On a $\lim_{n\to+\infty} a_n n^{-x} = 0$, donc lorsque n tend vers l'infini $a_n n^{-(x+1+\varepsilon)} = o(n^{-(1+\varepsilon)})$, ce qui entraîne que la série de terme général $a_n n^{-(x+1+\varepsilon)}$ converge absolument, d'où $\sigma_a(f) \leq x + 1 + \varepsilon \leq \sigma_c(f) + 1 + 2\varepsilon$. On a donc montré: pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1 + 2\varepsilon$, ce qui entraîne, en passant à la borne inférieure, que $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$.

I.B.1 Notons $z = a + ib$. On a

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zt}\ dt = \frac{e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}}{z},$$

d'où

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| &= |z|.|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zt}\ dt \\ &\leq |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} |e^{-zt}|\ dt = |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-at}\ dt \end{aligned}$$

En sommant pour n variant de N à l'infini, on obtient

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-at}\ dt = |z| \int_{\lambda_N}^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{|z|}{a} e^{-\lambda_N a} \tag{2}$$

En particulier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| \leq |z| \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{|z|}{a} e^{-\lambda_1 a} \leq \frac{|z|}{a}.$$

I.B.2 On applique l'inégalité (1) avec $x = s_0$ et $\varepsilon = re^{i\theta}$. On obtient

$$|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{k^{s_0+\varepsilon}}| \leq \frac{R'_n}{|n^\varepsilon|} + \frac{R'_n}{|(n+p)^\varepsilon|} + R'_n \sum_{k=n}^{+\infty} \left| \frac{1}{k^\varepsilon} - \frac{1}{(k+1)^\varepsilon} \right|,$$

avec $R'_n = \sup_{j \geq i \geq n} |\sum_{k=i}^{j} \frac{a_k}{k^{s_0}}|$. On peut écrire $\frac{1}{n^\varepsilon} = n^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \log n}$ et on a

$$|e^{-\varepsilon \log n}| = e^{-(\mathrm{Re}\ \varepsilon) \log n)} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\ \varepsilon}} = \frac{1}{n^{r \cos\theta}}.$$

De même, en prenant $\lambda_n = \log n$, $z = \varepsilon$ et $N = N$, l'inégalité (2) donne

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left| \frac{1}{k^\varepsilon} - \frac{1}{(k+1)^\varepsilon} \right| \leq \frac{|z|}{\mathrm{Re}\ z} e^{-\lambda_n a} \leq \frac{|z|}{\mathrm{Re}\ z} = |\frac{1}{\cos\theta}| \leq \frac{1}{\cos\phi}.$$

Finalement,

$$\forall s \in S_{s_0}(\phi) \quad \forall n, p \geq 1 \quad |\sum_{k=n}^{n+p} a_k k^{-s}| \leq (2 + \frac{1}{\cos\phi}) R'_n.$$

La série de terme général $a_k k^{-s}$ vérifie un critère de Cauchy uniforme sur $S_{s_0}(\phi)$: elle converge donc uniformément sur $S_{s_0}(\phi)$.

I.B.3 Si $x \in A_c(f)$, on a $x \in \{\text{Re } s; \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge }\}$, donc

$$\inf\{\text{Re } s; \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge }\} \leq x.$$

En prenant la borne inférieure sur les $x \in A_c(f)$, on obtient

$$\inf\{\text{Re } s; \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge }\} \leq \sigma_c(f).$$

Réciproquement, si $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge, la question précédente montre que $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}$ converge pour Re $z >$ Re s; en effet pour ϕ suffisamment proche de $\pi/2$, $z \in S_s(\phi)$. En particulier, pour $\varepsilon > 0$ la série converge au point $s + \varepsilon$, ce qui donne $\sigma_c(f) \leq \text{Re } s + \varepsilon$. Comme on peut prendre ε aussi petit que l'on veut, $\sigma_c(f) \leq \text{Re } s$. Il n'y a plus qu'à prendre la borne inférieure pour avoir l'inégalité $\sigma_c(f) \leq \inf\{\text{Re } s; \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge }\}$ qui complète la preuve de l'égalité voulue.

Posons $H = \{s \in \mathbb{C}; \text{Re } s > \sigma_c(f)\}$. On a

$$H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_{\sigma_c(f)+1/n}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}).$$

Pour $s = \sigma_c(f) + 1/n$ et $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, la série de terme général $a_k k^{-s}$ converge uniformément sur $S_s(\phi)$; comme c'est une série de fonctions holomorphes, elle converge donc vers une fonction holomorphe à l'intérieur de $S_s(\phi)$. Comme tout point de H admet un voisinage de la forme $S_{\sigma_c(f)+1/n}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})$, l'holomorphie de f sur H s'ensuit.

II Abscisse de convergence du produit

II.A.1 On note $r_n = \sum_{k\geq n} \alpha_k$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \beta_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k - \sum_{k=2}^{n+1} r_k \beta_{k-1} \\
&= r_1 \beta_1 - r_{n+1\beta_n} + \sum_{k=2}^{n} r_k (\beta_k - \beta_{k-1})
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On se donne N tel que $n \geq N$ entraîne $r_n \leq \varepsilon$. On a alors pour tout $n \geq N$:

$$|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k| \leq \left| r_1\beta_1 + \sum_{k=2}^{N-1} r_k(\beta_k - \beta_{k+1}) \right| + \varepsilon\beta_n + \varepsilon \sum_{k=N}^{n} |\beta_k - \beta_{k+1}|.$$

Mais comme (β_n) est croissante, donc on obtient

$$\begin{aligned} |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k| &\leq \left| r_1\beta_1 + \sum_{k=2}^{N-1} r_k(\beta_k - \beta_{k+1}) \right| + \varepsilon\beta_n + \varepsilon(\beta_n - \beta_N) \\ &\leq \left| r_1\beta_1 + \sum_{k=2}^{N-1} r_k(\beta_k - \beta_{k+1}) \right| + 2\varepsilon\beta_n. \end{aligned}$$

En divisant par β_n et en utilisant que β_n tend vers l'infini, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} |\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k| \leq 2\varepsilon,$$

d'où, comme ε peut être pris arbitrairement petit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = 0.$$

II.A.2 On pose $\alpha_n = c_n n^{-\alpha}$, $\beta_n = n^\alpha$. D'après la question précédente $\frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k$ a une limite nulle, mais $\frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \frac{c_1+\cdots+c_n}{n^\alpha} = \frac{s_n}{n^\alpha}$, d'où le résultat voulu.

II.A.3 On va montrer que la série de terme général $\frac{c_k}{k^{\alpha+\varepsilon}}$ converge dès que $M = \sup_{n\geq 1} |s_n n^{-\alpha}| < +\infty$, ce qui est évidemment vérifié si $s_n n^{-\alpha}$ a une limite nulle.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k^{\alpha+\varepsilon}} &= \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} s_k \frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\varepsilon}} \\ &= \frac{s_n}{n^{\alpha+\varepsilon}} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (\frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\varepsilon}}) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n^{\alpha+\varepsilon}} = 0$, la série de terme général $\frac{c_k}{k^{\alpha+\varepsilon}}$ est de même nature que la série de terme général $s_k(\frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\varepsilon}})$. Montrons que cette dernière converge absolument. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\varepsilon}}| \leq \frac{\alpha+\varepsilon}{k^{\alpha+\varepsilon+1}}.$$

Comme $|s_k| \leq M k^\alpha$, on a alors

$$|s_k(\frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\varepsilon}})| \leq \frac{M(\alpha+\varepsilon)}{k^{1+\varepsilon}},$$

ce qui assure la convergence voulue. On va voir que la réciproque est fausse. Prenons en effet $\alpha = 1$, on pose $c_1 = 0$, puis $c_n = \frac{1}{\log n}$ pour $n \geq 2$. Avec le lemme de Cesaro, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(c_1 + \cdots + c_n) = 0$. Cependant la série de terme général $\frac{c_n}{n^\alpha} = \frac{1}{n \log n}$ diverge (par exemple parce que $\frac{1}{n\log n} \sim \log\log(n+1) - \log\log n$ et la série de terme général $\log\log(n+1) - \log\log n$) diverge évidemment.

II.B.1

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} c_n &= \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{i,j\geq 1\\ ij=n}} a_i b_j \\
&= \sum_{\substack{i,j\geq 1\\ ij\leq x}} a_i b_j \\
&= \sum_{i\geq 1} \sum_{\substack{i\geq 1\\ ij\leq x}} a_i b_j \\
&= \sum_{i\geq 1} a_i \sum_{1\leq x/i} b_j \\
&= \sum_{i\geq 1} a_i B(\frac{x}{i})
\end{aligned}$$

Notons que toutes les sommes considérées sont finies.

II.B.2 f converge absolument en 0 donc $\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$. g converge en 0 donc la série de terme général b_n converge.

En particulier $M = \sup_{p\geq 1} |\sum_{i=1}^{p} b_i| < +\infty$. On a

- Pour tout $i \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} a_i B(\frac{x}{i})| = a_i \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.
- Pour tout $i \geq 1$, pour tout $x \geq 1$: $|a_i B(\frac{x}{i}) \leq M|a_i|$.
- $\sum_{i\geq 1} M|a_i| < +\infty$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (pour la mesure de comptage):

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i B(\frac{x}{i}) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right),$$

soit

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\leq x} c_n = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right),$$

ce qui signifie que la série de terme général c_n converge et que

$$\sum_{n\geq 1} c_n = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right).$$

II.B.3 Soit $\varepsilon > 0$. D'après I.A.2 et I.B.3, $\sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-(\sigma+\varepsilon)} < +\infty$ et la série de terme général $b_n n^{-(\sigma+\varepsilon)}$ converge. On pose $a'_n = a_n n^{-(\sigma+\varepsilon)}$ et $b'_n = b_n n^{-(\sigma+\varepsilon)}$ et on leur applique II.B.2: si on pose $c'_n = \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij=n}} a'_i b'_j$, on a que la série de terme général c'_n converge avec

$$\sum_{n\geq 1} c'_n = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a'_i \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b'_n \right).$$

Mais comme

$$\begin{aligned} c'_n &= \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij=n}} a'_i b'_j = \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij=n}} i^{-(\sigma+\varepsilon)} a_i b_j j^{-(\sigma+\varepsilon)} \\ &= \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij=n}} a_i b_j (ij)^{-(\sigma+\varepsilon)} = \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij=n}} a_i b_j n^{-(\sigma+\varepsilon)} \\ &= c_n n^{-(\sigma+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

on a alors

$$\sum_{n\geq 1} c_n n^{-(\sigma+\varepsilon)} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-(\sigma+\varepsilon)} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n n^{-(\sigma+\varepsilon)} \right),$$

ce qui montre que $\forall \varepsilon > 0$, $h(\sigma+\varepsilon) = f(\sigma+\varepsilon) g(\sigma+\varepsilon)$ et $\sigma_c(h) \leq \sigma + \varepsilon$. Comme ε peut être pris arbitrairement petit, $\sigma_c(h) \leq \sigma$. D'après I.B.3, h définit une fonction holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\ z > \sigma_c(h)\}$, donc en particulier dans $\{\mathrm{Re}\ z > \sigma\}$. h et fg sont deux fonctions holomorphes sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ z > \sigma\}$ qui coïncident sur $]\sigma, +\infty[$: elles sont donc égales d'après le théorème des zéros isolés.

II.C.1

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} c_N = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij=n}} a_i b_j = \sum_{\substack{i,j\geq 1 \\ ij\leq N}} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in E} a_i b_j,$$

avec $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}_*^2; ij \leq n\}$. On pose $A = \{(i,j) \in E; i \leq \sqrt{n}\}$ et $B = \{(i,j) \in E; j \leq \sqrt{n}\}$. On a

$$E = (E\cap A\cap B)\cup(E\cap A\cap B^c)\cup(E\cap A^c\cap B)\cup(E\cap A^c\cap B^c) = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c),$$

par A et B sont des parties de E et que $A^c \cap B^c = \varnothing$. On a donc

$$S_N = \sum_{(i,j)\in E} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in A\cap B} a_i b_j + \sum_{(i,j)\in A\cap B^c} a_i b_j + \sum_{(i,j)\in A^c\cap B} a_i b_j,$$

ce qui donne l'identité voulue.

II.C.2 Posons $\varepsilon_n = \sup_{k,k'\geq n} |\sum_{i=k}^{k'} a_i|$ et $\varepsilon'_n = \sup_{k,k'\geq n} |\sum_{i=k}^{k'} b_i|$. D'après le critère de Cauchy de convergence des séries, $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$. De plus, tous les ε_i et ε'_i sont finis. En appliquant l'égalité trouvée au II.C.1, on a

$$|S_N| \leq |\sum_{i\leq\sqrt{N}} a_i||\sum_{j\leq\sqrt{N}} b_j| \leq \sum_{i\leq\sqrt{N}} |a_i|\varepsilon'_{\sqrt{n}} + \sum_{j\leq\sqrt{N}} |b_j|\varepsilon_{\sqrt{n}},$$

puis

$$|S_N| \leq \varepsilon_1\varepsilon'_1 + \sum_{i\leq\sqrt{N}} \varepsilon_1\varepsilon'_{\sqrt{N}} + \sum_{j\leq\sqrt{N}} \varepsilon'_1\varepsilon_{\sqrt{N}},$$

et

$$\frac{|S_N|}{\sqrt{N}} \leq \frac{\varepsilon_1\varepsilon'_1}{\sqrt{N}} + \varepsilon_1\varepsilon'_{\sqrt{N}} + \varepsilon'_1\varepsilon_{\sqrt{N}},$$

d'où $\lim_{N\to+\infty} \frac{|S_N|}{\sqrt{N}} = 0$.

II.C.3 D'après II.A.3, le résultat de la question précédente entraine que pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $c_n n^{-(1/2+\varepsilon)}$ converge, d'où $\sigma_c(h) \leq 1/2+\varepsilon$, puis $\sigma_c(h) \leq 1/2$.

II.C.4 D'après I.B.3, h, f, g, définissent bien des fonctions holomorphes sur le demi-plan $\{\text{Re } z > 1/2\}$. D'après le principe des zéros isolés, pour montrer l'identité $h = fg$ sur $\{\text{Re } z > 1/2\}$, il suffit de la démontrer sur $\{\text{Re } z > 3/2\}$. Or, d'après I.A.3, on a $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1 \leq 0 + 1 = 1$, $\sigma_a(g) \leq \sigma_c(g)+1 \leq 0+1 = 1$, $\sigma_a(h) \leq \sigma_c(h)+1 \leq 1/2+1 = 3/2$, et d'après II.B.3, on a $h = fg$ dans le demi-plan $\{\text{Re } z > 3/2\}$, ce qui achève la preuve.

II.D.1 Notons $S_n(a) = \sum_{k=1}^n a_k$. On a pour tout $a \in E$, $\|a\| = \sum_{n\geq 1} |S_n(a)|$. Soit $(a^k)_{k\geq 1}$ une suite de Cauchy de E quelconque. On va montrer que $(a^k)_{k\geq 1}$ converge (pour la topologie de E), ce qui montrera que E est complet. Soit $n \geq 1$. Pous tous $i, j \geq 1$, on a

$$|S_n(a^i) - S_n(a^j)| = |S_n(a^i - a^j)| \leq \|a^i - a^j\|.$$

Ainsi, comme $(a^k)_{k\geq 1}$ une suite de Cauchy, $(S_n(a^k))_{k\geq 1}$ est aussi une suite de Cauchy, mais cette dernière est une suite réelle, donc $S_n(a^k)$ converge vers un réel s_n.

Soit maintenant $N = N(\varepsilon) \geq 1$ tel que $(i, j \geq N) \Longrightarrow \|a^i - a^j\| \leq \varepsilon/4$.

$$\forall n \geq 1 \quad \forall i, j \geq N(\varepsilon) \quad |S_n(a^i) - S_n(a^j)| \leq \varepsilon/4.$$

Fixons $n \geq 1$ et $i \geq N(\varepsilon)$ et faisons tendre j vers l'infini: on obtient

$$\forall i \geq N(\varepsilon) \quad \forall n \geq 1 \quad |S_n(a^i) - s_n| \leq \varepsilon/4 \qquad (3)$$

Comme $a^N \in E$, $(S_n(a^N))_{n\geq 1}$ est convergente, donc de Cauchy: il existe $N' = N'(\varepsilon)$ tel que pour $n, p \geq N'$, on ait $|S_n(a^N) - S_p(a^N)| \leq \varepsilon/2$. Pour $n, p \geq N'(\varepsilon)$, on a donc

$$|s_n - s_p| \leq |s_n - S_n(a^N)| + |S_n(a^N) - S_p(a^N)| + |S_p(a^N) - s_p| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $(s_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy: si l'on pose $a_n^* = s_n - s_{n-1}$ (avec la convention $s_0 = 0$), on a $a^* \in E$. Reste à montrer que $(a^k)_{k\geq 1}$ converge vers a^*. Soit $\varepsilon > 0$ En remarquant que $S_n(a^*) = s_n$, on a avec (3):

$$\forall i \geq N(\varepsilon) \quad \forall n \geq 1 \quad |S_n(a^i) - S_n(a^*)| \leq \varepsilon/4,$$

soit

$$\forall i \geq N(\varepsilon) \quad \forall n \geq 1 \quad |S_n(a^i - a^*)| \leq \varepsilon/4,$$

d'où

$$\forall i \geq N(\varepsilon) \quad \|a^i - a^*\| \leq \varepsilon/4,$$

ce qui donne la convergence de $(a^k)_{k\geq 1}$ vers a^*.

II.D.2 Soit $(a, b) \in E^2$. Les séries de Dirichlet associées sont convergentes, donc par définition de α, la série de terme général $c_n^{n-\alpha}$ converge. d'après II.A.2, $\lim_{N\to+\infty} L_N(a, b) = 0$, donc $\sup\limits_{N\geq 1} |L_N(a, b)| < +\infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus pour les formes bilinéaires sur un produit de Banach, $M = \sup_{N\geq 1} |||L_N||| < +\infty$ et on a

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad |L_N(a, b)| \leq A\|a\|\|b\|.$$

II.D.3 On applique II.B.1 avec $x = N$ et on a

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i B(\frac{N}{i}) = \sum_{i=1}^{N} a_i B(\frac{N}{i}),$$

car B est nulle sur $[0, 1[$. De plus par définition de B, on a $B(\frac{N}{i}) = B([\frac{N}{i}]) = B(\lambda_i)$. Ainsi $\sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{i=1}^{N} a_i B(\lambda_i)$, soit

$$\sum_{i=1}^{N} a_i B(\lambda_i) = \sum_{n=1}^{N} c_n = N^\alpha L_N(a, b),$$

d'où avec II.D.3,

$$|\sum_{i=1}^{N} a_i B(\lambda_i)| \leq \|a\|\|b\| M N^\alpha.$$

II.D.4.a D'après les propriétés classiques de la partie entière, on a $\lambda_j \leq \frac{N}{j}$ et $\lambda_i > \frac{N}{i} - 1$, donc $\lambda_i - \lambda_j > \frac{N}{i} - \frac{N}{j} - 1$. Mais d'après l'inégalité des accroissements finis $\frac{N}{i} - \frac{N}{j} \geq \frac{N}{j^2} \geq \frac{N}{m^2} = 1$, d'où $\lambda_i - \lambda_j > 1 - 1 = 0$, soit $\lambda_i > \lambda_j$.

II.D.4.b Il est aisé de voir que $i \mapsto \lambda_i$ est décroissante. Comme $\lambda_i \geq \lambda_m \geq \lambda_{m+1} \geq \lambda_k$, il suffit de voir que $\lambda_m > \lambda_{m+1}$. Or $\lambda_m = [\frac{N}{m}] = [m] = m$, et $\frac{N}{m+1} < m$, on $\lambda_{m+1} = [\frac{N}{m+1}] < m$, soit $\lambda_{m+1} < \lambda_m$.

II.D.4.c Soit $J = \{\lambda_i; 1 \leq i \leq N \text{ et } a_i \neq 0\}$. On définit par récurrence $(b_n)_{0 \leq n \leq \max J}$ par $b_0 = 0$ et pour $1 \leq n \leq \max J$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin J \\ \frac{|a_i|}{a_i} & \text{si } i = \min J \text{ et } n = \lambda_i \\ \frac{|a_i|}{a_i} - \frac{|a_j|}{a_j} & \text{si } n = \lambda_i \text{ et } j = \max J \backslash [i + \infty[\end{cases}$$

On pose alors $b_{m+1} = -b_m$, puis $b_k = 0$ pour $k > m+1$. Ainsi par construction on a $a_i B(\lambda_i) = |a_i|$ si $i \leq \sqrt{N} = m$, $B(k) = 0$ pour $k \geq m+1$ et B est constant entre deux $(\lambda_i)_{i \leq m}$. Ainsi, par construction, $S_n(b) \in \{0\} \cup \{\frac{|a_i|}{a_i}; i \in J\}$, d'où $S_n(b)$. On en déduit $\|b\| \leq 1$.

II.D.5 Dans ce cas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} a_i B(\lambda_i) &= \sum_{i=1}^{m} a_i B(\lambda_i) + \sum_{i=m+1}^{N} a_i B(\lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} |a_i| + \sum_{i=m+1}^{N} 0 \\ &= \sum_{i=1}^{m} 1 = m. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $S_n(a) = -1$ si n est impair et 0 si n est pair. On en déduit $\|a\| = 1$. Ainsi l'inégalité

$$|\sum_{i=1}^{N} a_i B(\lambda_i)| \leq \|a\| \|b\| M N^{\alpha}$$

établie en II.D.3 entraîne ici $m \leq MN^{\alpha}$, soit $m \leq Mm^{2\alpha}$. Mais pour que cette inégalité soit vérifiée pour tout $m \geq 1$, il est nécessaire que $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

FIN