

Rapport sur l'épreuve d'analyse numérique du concours 3ème année de l'ENS Cachan - Session 2010

Le sujet porte sur la méthode de Newton et différentes variantes de cette méthode qui permettent de déterminer les zéros d'une fonction f .

La première partie s'intéresse à la convergence de la méthode en dimension 1 sous certaines hypothèses sur f .

La partie II considère le cas particulier où la fonction f est un polynôme. Dans ce cas, on peut trouver une formule explicite et très simple de la fonction de Newton.

La partie III introduit la méthode de Broyden. Cette méthode, contrairement à la méthode de Newton, ne fait pas intervenir le gradient de la fonction f et est donc utilisée quand le gradient est difficile à calculer. Le gradient est approché à chaque itération en fonction du gradient calculé à l'itération précédente. On montre alors que, en partant d'une donnée initiale x_0 suffisamment proche d'un zéro et en partant d'une approximation du gradient en x_0 suffisamment proche du gradient en x_0 , la suite définie par la méthode de Broyden converge super-linéairement vers un zéro de f , sous certaines hypothèses de régularité sur f .

Enfin la partie IV propose une variante dans le cas où la fonction f est définie d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m avec $n \leq m$. On introduit dans ce cas l'inverse généralisé du gradient.

De façon générale, les copies sont assez bien rédigées. Il a été apprécié que le candidat donne des réponses concises. Certains candidats n'ont fait aucun effort de présentation, ce qui nuit au jugement global de la copie.

Les deux premières parties ont été les plus abordées par les candidats.

La partie I utilise de manière répétée le développement en série de Taylor. Dans la question 2(b), seuls un ou deux candidats ont pensé à vérifier que l'intervalle restait stable par ϕ pour utiliser le théorème de point fixe de Banach-Picard.

C'est sur la partie II que les candidats ont en général eu le plus de points. Les réponses à la question 1 n'étaient pas toujours concises et formulées de façon claire. La difficulté était ici de transcrire mathématiquement l'intuition qu'on pouvait avoir de la démonstration. La remarque s'applique aussi à la question 2. Il est certain que sur ce type de questions, la façon de rédiger les réponses est capitale et les points portent en grande partie sur la rédaction. Lorsque les candidats s'étaient bien appropriés les notations, les questions 3 et 4 étaient en général bien traitées.

Les candidats ont souvent été assez peu inspirés par la partie III. A part

les questions 2(c) et 3(a) qui ne présentaient pas de difficultés majeures, les autres questions ont été traitées correctement par très peu de candidats.

La partie IV a été assez peu abordée. Les réponses données dans certaines copies montrent des lacunes importantes en calcul différentiel. La question 3(b) qui nécessitait une bonne maîtrise du calcul différentiel a été bien traitée dans une seule copie.