

Concours d'admission en 3^{ème} année Épreuve de Maths II - Sujet 1 - Probabilités et Statistiques

Le sujet porte sur les suites de renouvellement en temps discret et leurs liens avec les chaînes de Markov.

La première partie introduit la chaîne des âges à partir d'un processus de renouvellement. Il s'agit de montrer ici que ce processus est une chaîne de Markov à espace d'état discret, puis de faire le lien entre les propriétés de la distribution des durées inter-renouvellement et la classification des états de la chaîne des âges.

Les parties II et III étudient les suites de renouvellement, i.e., la probabilité d'avoir un instant de renouvellement à une date donnée. La partie II contient des préliminaires à la partie III, ainsi que quelques manipulations de séries génératrices des probabilités. La troisième partie est consacrée à l'étude asymptotique des suites de renouvellement, en suivant une démonstration due à Erdős, Feller et Pollard. Cette preuve repose principalement sur une relation de récurrence, et des majorations ou minorations assez fines.

La partie IV fait le lien avec les chaînes de Markov : les dates de passages d'une chaîne de Markov par un état fixé forment un processus de renouvellement en temps discret. Il est remarquable que cette structure forte en renouvellement et les techniques d'analyse de la partie III permette d'obtenir la convergence vers la loi stationnaire sous les hypothèses classiques.

Enfin, la partie V propose deux exercices sur les suites de renouvellement.

Il subsiste une erreur d'énoncé dans la partie IV. Dans la question IV.2, il faut lire : « on choisit $Y_k = Z_k - Z_{k-1}$ ».

Remarques sur les compositions.

Ce sujet était long et technique. Les bons candidats sont ceux qui ont su choisir les parties qu'ils pouvaient développer. La dernière partie n'a pratiquement pas été abordée. Les définitions d'état transient, récurrent nul et récurrent positif ne semblent pas toujours acquises.

Partie I. Les questions I.1, I.2 et I.3 ont été traitées avec plus ou moins de bonheur. Une erreur rédhibitoire est de penser que « A sachant B » est un événement, elle marque une incompréhension complète de la notion de probabilité conditionnelle. Le calcul de la loi stationnaire dans la question 5 a été très rarement traité. La question II.4.d fournit presque la réponse et aurait pu permettre à certains candidats de revenir sur cette question.

Partie II. C'est la partie qui a été le mieux traitée par les candidats.

Partie III. Les candidats ont tous séché sur les inégalités des questions III.1.b et III.5.a. La question III.3 est un grand classique des cours de M1 sur les chaînes de Markov. Les candidats auraient dû savoir la traiter.

Partie IV. Les candidats ont visiblement perdu du temps dans les premières parties pour traiter celle-ci. L'erreur d'énoncé ne semble avoir déranger aucun candidat. L'utilisation du théorème de convergence dominée dans la question IV.3 n'est pas toujours rédigé avec soin, quand elle n'est pas tout simplement omise.