Solution abrégée du sujet de Probabilités, Cachan 3A 2010

Avertissement: Je tiens à préciser que je ne suis pas lié à l'École Normale Supérieure de Cachan; par suite les affirmations vraies ou fausses contenues dans ces pages ne sauraient engager l'École.

Olivier Garet, le 19 juillet 2013

Mes commentaires: le sujet tourne autour d'un théorème d'Erdös, Feller et Pollard sur le comportement asymptotiques de suites vérifiant une équation dite de renouvellement.

Ces équations apparaissent naturellement en probabilité, en particulier dans l'étude des temps de retour d'une chaîne de Markov.

Il existe de nombreuses preuves du théorème d'Erdös, Feller et Pollard. Erdös, Feller et Pollard en donnent d'ailleurs deux preuves dans leur article *A property of power series with positive coefficients.* La première preuve, limitée au cas $m < +\infty$, repose sur le théorème de Wiener des séries trigonométrique. La deuxième preuve, qui vaut en toute généralité, est celle qui est présentée dans la partie III du problème. Elle repose sur des majorations habiles relevant de l'analyse réelle classique. On dit parfois que le théorème d'Erdös, Feller et Pollard est équivalent au théorème de convergence des chaînes de Markov récurrentes positives. En effet, il est possible de démontrer le théorème d'Erdös, Feller et Pollard à l'aide du théorème du théorème de convergence des chaînes de Markov récurrentes positives, et de même, le théorème de convergence des chaînes de Markov récurrentes positives peut s'obtenir comme conséquence du théorème d'Erdös, Feller et Pollard. Cette dernière implication fait l'objet de la partie IV.

La première partie montre comment construire la chaîne de Markov de l'état des stocks (ou chaîne des âges) à partir de la suite des sommes de variables i.i.d. De mon point de vue, cette première partie est assez difficile, en particulier 3.b et 3.c qui mèlent des arguments de mesurabilité et des arguments déterministes. La fin de la partie est plus classique, demandant une bonne connaissance des théorèmes du programme. Je conseille de la laisser de côté en première lecture, le reste du sujet étant assez indépendant (seules II.4.d et V.2 me semblent utiliser cette première partie.) Les parties les plus faciles sont vraisemblablement la partie II et la partie IV. La partie III ravira les amateurs de belle analyse.

Partie I

1. Posons $m = \max\{S_k : k \in \mathbb{N} : S_k \leq n\}$. Par construction, $m \leq n$. Si $m < n$, il n'existe pas d'entier k tel que $S_k = n$, sinon cela contredirait la définition du max. Si $m = n$, comme le max est atteint, il existe k tel que $S_k = n$. Ainsi il existe un entier k tel que $S_k = n$ si et seulement si $m = n$, donc si et seulement si $A_n = 0$. Notons que comme $m \leq n$ et m est entier, on a toujours $A_n = n - m \in \mathbb{N}$.

2. Non. Posons $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots S_n)$, $\tau(n)$.

   Comme $(S_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante, on a

   $$\{\tau(n) \leq k\} = \bigcup_{i=1}^{k+1} \{S_i > n\} \in \mathcal{F}_{k+1},$$

   ce qui fait que $\tau(n)$ est un $(\mathcal{F}_{k+1})_{k\geq 0}$ temps d'arrêt, mais pas un $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ temps d'arrêt.

3. (a) $S_0 = 0$ presque sûrement, donc d'après 1., $A_0 = 0$ presque sûrement. On a déjà vu que $(A_n)_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante car $Y_k \geq 1$ pour tout k. On en déduit que $S_k \geq k$ pour tout $k \geq 1$, ce qui entraîne que $\tau(n) \leq n$ pour tout $n \geq 1$. Comme $n \mapsto S_n$ est croissante, on a

   $$S_{\tau(n)} = \sup\{S_k : k \in \mathbb{N}; S_k \leq n\} = n - A_n.$$

   Par définition, on a $S_k \leq n$ pour $k \leq \tau(n)$ et $S_k > n$ pour $k > \tau(n)$. En particulier $S_{\tau(n)+1} > n$, ou de manière équivalente $S_{\tau(n)+1} \geq n + 1$. Notons qu'on a l'équation

   $$Y_{\tau(n)+1} - A_n = S_{\tau(n)+1} - S_{\tau(n)} - A_n = S_{\tau(n)+1} - (S_{\tau(n)} + A_n) = S_{\tau(n)+1} - n.$$

   On a alors

   - Soit $S_{\tau(n)+1} = n + 1$
     (ou de manière équivalente $Y_{\tau(n)+1} - A_n = 1$).
   - Soit $S_{\tau(n)+1} > n + 1$
     (ou de manière équivalente $Y_{\tau(n)+1} - A_n > 1$).

   Dans le premier cas, on a $A_{n+1} = (n+1) - S_{\tau(n)+1} = (n+1) - (n+1) = 0$. Dans le second cas, on a $\{k \in \mathbb{N}; S_k \leq n+1\} = \{0, \dots, \tau(n)\}$, d'où $A_{n+1} = (n+1) - \max\{S_k : k \in \mathbb{N}; S_k \leq \tau(n)\} = n+1-S_{\tau(n)} = A_n+1$. Dans tous les cas, on a bien $A_{i+1} \in \{0, A_i + 1\}$, pour tout i, ce qui nous donne $(A_0, \dots, A_n) \in \Gamma_n$.

   (b) À n fixé, il est aisé de voir que les événements D de $\sigma(A_0, \dots, A_n)$ tels que pour tous $k, a \geq 0$ il existe $D_k \in \sigma(S_0, \dots, S_k)$ tels que

   $$D \cap \{\tau(n) = k\} \cap \{A_n = a\} = D_k \cap \{\tau(n) = k\} \cap \{A_n = a\}$$

   forment une tribu.

   Comme les événements D de la forme $D = \{A_i \leq x\}$ où x décrit $\mathbb{R}$ et i décrit $\{0, \dots, n\}$, il suffit donc de vérifier que ces événements vérifient cette propriété.

   Si $i = n$ et $a \leq x$, il suffit de poser $D_k = \Omega$. Si $i = n$ et $a > n$, il suffit de poser $D_k = \varnothing$. Supposons donc $i < n$. Sur l'événement $\{\tau(n) = k\}$, on a $S_k \geq n$ et $S_j < n$ pour $j < k$. On sait de plus que $S_0 = 0$ et que la suite (S_k) est strictement croissante, donc il existe un unique $\ell < k$ tel que $S_\ell \leq i < S_{\ell+1}$. On a alors $A_i = i - S_\ell$. Cela nous donne l'identité voulue, en posant

$$D_k = \bigcup_{0 \leq \ell < k} \{S_\ell \leq i < S_{\ell+1}\} \cap \{i - S_\ell \leq x\}.$$

(c) Notons que $Y_{\tau(n)+1} - A_n = Y_{\tau(n)+1} - n + S_{\tau(n)} = S_{\tau(n)+1} - n > 0$ par définition de $\tau(n)$. Pour tout $j \geq 1$, on a la réunion disjointe

$$\{Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A\} = \bigcup_{k \geq 0} \{Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, \tau(n) = k\}$$

D'autre part, il n'est pas très difficile de voir que

$$\{Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, \tau(n) = k\} = \{n - S_k = a, Y_{k+1} = a + j\}.$$

En reprenant le raisonnement de la question précédente, on voit que pour tout $D \in \sigma(A_0, \ldots, A_n)$, il existe $D_k \in \sigma(S_0, \ldots, S_k)$ avec

$$\{D, Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, \tau(n) = k\} = \{D_k, n - S_k = a, Y_{k+1} = a + j\}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, D) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(D, Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, \tau(n) = k) \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(D_k, n - S_k = a, Y_{k+1} = a + j) \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(D_k, n - S_k = a)\mathbb{P}(Y_{k+1} = a + j) \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(D_k, n - S_k = a)\mathbb{P}(Y_1 = a + j) \\
&= C(D, a)\mathbb{P}(Y_1 = a + j)
\end{aligned}$$

Les événements $(\{Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, D\})_{j \geq 1}$ forment une partition de $\{A_n = A, D\}$, ce qui nous donne

$$\sum_{j \geq 1} C(D, a)\mathbb{P}(Y_1 = a + j) = \mathbb{P}(A_n = A, D),$$

d'où

$$C(D, a) = \frac{\mathbb{P}(A_n = A, D)}{\mathbb{P}(Y_1 > a)},$$

ce qui nous donne bien

$$\mathbb{P}(Y_{\tau(n)+1} - A_n = j, A_n = A, D) = \mathbb{P}(Y_1 = a + j | Y_1 > a)\mathbb{P}(A_n = A, D).$$

(d) On vient de montrer que pour $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y_{\tau(n)+1} - A_n = j | \mathcal{F}_n^A) = f_j(A_n),$$

avec $f_j(a) = \mathbb{P}(Y_1 = a + j | Y_1 > a)$. En particulier, avec 3.a, on a

$$\mathbb{P}(A_{n+1} = 0 | \mathcal{F}_n^A) = f_1(a) = \mathbb{P}(Y_1 = a + 1 | Y_1 > a).$$

Encore avec 3.a $\mathbb{P}(A_{n+1} = A_n + 1 | \mathcal{F}_n^A) = 1 - \mathbb{P}(A_{n+1} = 0 | \mathcal{F}_n^A) = 1 - f_1(A_n)$. Ainsi, si l'on pose $p_{i,j} = f_1(i)$ si $j = 0$, $p_{i,i+1} = 1 - f_1(i)$ et $p_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas, on constate que pour tous i, j, on a presque sûrement

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{A_n = i\}} \mathbb{1}_{\{A_{n+1} = j\}} | \mathcal{F}_n^A] = p_{i,j} \mathbb{1}_{\{A_n = i\}}.$$

(Il suffit d'étudier séparément chaque cas). En sommant sur i, on obtient $\mathbb{P}(A_{n+1} = j | \mathcal{F}_n^A) = p_{A_n,j}$, ce qui montre que (A_n) est une chaîne de Markov de matrice de passage $(p_{i,j})$. L'état initial est $A_0 = 0$ car $S_0 = 0$ en utilisant la remarque faite au 1.

4. (S_n) est une suite strictement croissante d'entiers, donc pour tout n, il existe un unique k tel que $S_k \leq n < S_{k+1}$. On a alors $A_n = n - S_k$ et $0 \leq n - S_k < S_{k+1} - S_k = Y_{k+1} \leq K$ p.s., car $\mathbb{P}(Y_{k+1} \leq K) = p_1 + \cdots + p_k = 1$. Ainsi, la chaîne prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, K-1\}$. Pour $i < K - 1$,on a

$$p_{i,i+1} = 1 - f_1(i) = 1 - \frac{f_{i+1}}{\sum_{j \geq i+1} f_j}.$$

Or $f_{i+1} < \sum_{j \geq i+1} f_j$, sinon cela contredirait la définition de K: on a donc $p_{i,i+1} > 0$: la chaîne toujours aller de proche en proche d'un entier à tout entier plus grand. Maintenant, si $i < K$, il existe $j \geq i$ avec $f_{j+1} > 0$ (sinon cela contredirait la définition de K). On a alors $p_{j,0} = \mathbb{P}(Y_i = j + 1 | Y_i > j) > 0$. Ainsi, de tout entier $i < K$, on peut, en passant par un entier plus grand, aller à 0, puis de là,à n'importe quel entier: la chaîne est bien irréductible.

5. (a) Pour n compris entre 1 et Y_1, on a $A_n = Y_1 - n$: ainsi, le premier retour en 0 partant de 0 est Y_1: on a donc $\mathbb{E}^0[T_0] = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$, ce qui montre que 0 est récurrent positif. La chaîne est donc irréductible récurrente positive.

   (b) Une chaîne irréductible récurrente positive admet une unique probabilité invariante μ. D'après le théorème ergodique des chaînes de Markov, on a presque sûrement $\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{A_k = x\}}$, et en particulier $\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{S_n-1} 1\!\!1_{\{A_k=x\}}$. Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{S_n-1} 1\!\!1_{\{A_k=x\}} &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{Y_{k+1}} 1\!\!1_{\{A_{S_i+j}=x\}} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{Y_{i+1}} 1\!\!1_{\{S_{i+1}-(S_i+j)=x\}}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{Y_{i+1}} 1\!\!1_{\{Y_{i+1}-j=x\}} = \sum_{i=0}^{n-1} 1\!\!1_{\{0\le x\le Y_{i+1}-1\}}\\ &\sim n\mathbb{P}(Y_1 \ge x+1)\end{aligned}$$

d'après la loi forte des grands nombres. De même,la loi des grands nombres donne $S_n \sim n\mathbb{E}[Y_1]$. Finalement, on obtient $\mu(x) = \frac{\mathbb{P}(Y_1\ge x+1)}{\mathbb{E}[Y_1]}$.

Partie II

1.

$$\begin{aligned}u_k = \mathbb{P}(\exists n\ge 0 \quad S_n = k) &= \mathbb{P}(Y_1 \le k \exists n \ge 0 \quad S_n = k)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y_1 = i, \exists n\ge 0 \quad S_n = k)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y_1 = i, \exists n\ge 0 \quad S_n - Y_1 = k-i)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y_1 = i, \exists n\ge 1 \quad S_n - Y_1 = k-i)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y_1 = i)\mathbb{P}(\exists n\ge 1 \quad S_n - Y_1 = k-i)\end{aligned}$$

Comme la suite $(S_n - Y_1)_{n\ge1}$ a la même loi que la suite $(S_n)_{n\ge0}$, on a $\mathbb{P}(\exists n\ge 1 \quad S_n - Y_1 = k-i) = \mathbb{P}(\exists n\ge 0 \quad S_n = k-i) = u_{k-i}$, ce qui nous donne la récurrence $u_k = \sum_{i=1}^k f_i u_{k-i}$.

2. Comme les Y_i sont à valeurs dans $d(f)\mathbb{N}$, les S_n aussi, donc il ne peut exister de n tel que $S_n = k$ que si $d(f)$ divise k. Ainsi $u_k > 0$ entraîne $d(f)$ divise k. Par suite $d(u) \ge d(f)$.

   Par ailleurs $f_k > 0$ entraîne $u_k \ge f_k u_0 = f_k > 0$, ce qui entraîne que $d(u)$ divise k. Par suite $d(f) \ge d(u)$. Ainsi $d(f) = d(u)$.

3. (a) On a

$$\begin{aligned}\{L_n = \ell\} &= \{\exists k\ge 0; S_k = \ell; S_{k+1} > n\}\\ &= \{\exists k\ge 0; S_k = \ell; \ell + Y_{k+1} > n\}\\ &= \cup_{k\ge0}\{S_k = \ell; Y_{k+1} > n-\ell\}.\end{aligned}$$

La réunion est disjointe car la suite (S_n) est strictement croissante. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_n = \ell) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(S_k = \ell; Y_{k+1} > n-\ell) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(S_k = \ell)\mathbb{P}(Y_{k+1} > n-\ell) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(S_k = \ell)\mathbb{P}(Y_1 > n-\ell) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(S_k = \ell) r_{n-\ell} \\
&= \mathbb{P}(\cup_{k\geq 0}; S_k = \ell) r_{n-\ell} \text{ la réunion est disjointe} \\
&= u_\ell r_{n-\ell}
\end{aligned}$$

(b) On a $0 \leq L_n \leq n$, donc les événements $(\{L_n = \ell\})_{0\leq \ell \leq n}$ forment une partition de Ω, et on a

$$1 = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(L_n = \ell) = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell r_{n-\ell}.$$

(c) On a

$$m = \sum_{n=0}^{+\infty} n f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} 1\!\!1_{\{k<n\}} f_n.$$

Comme les termes sont positifs, on peut échanger les deux sommes et

$$m = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 1\!\!1_{\{k<n\}} f_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k.$$

4. (a) La série entière définissant $\hat{f}$ converge au point $s = 1$, avec comme somme 1, donc le rayon de convergence est au moins 1. L'inégalité $|u_n| \leq 1$ (u_n représente une probabilité) assure la convergente de la série entière associée sur la boule unité ouverte.

(b) En prolongeant avec $f_0 = 0$, on voit que la question 1) exprime que pour tout $n \geq 1$, $u(n) = (f * u)(n)$, où $*$ désigne le produit de convolution des suites indexées par n. Plus généralement

$$\forall n \geq 0 \quad u(n) = (f*u)(n) + u(0)\delta_0(n) = (f*u+\delta_0)(n).$$

Les résultats classiques sur les produits de séries entières nous disent que sur D, on a $\hat{f}(s)\hat{u}(s) = \widehat{f*u}(s)$, soit donc ici $\hat{f}(s)\hat{u}(s) = u \hat{-} \delta_0(s) = \hat{u}(s) - 1$, donc

$$1 = \hat{u}(s)(1 - \hat{f}(s)),$$

ce qui donne l'égalité voulue.

(c) Dans ce cas

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta(1-\theta)^{n-1}s^n = s\theta\sum_{n=1}^{+\infty}(s(1-\theta))^{n-1}$$
$$= \frac{s\theta}{1-s(1-\theta)} = \frac{s\theta}{1-s+s\theta},$$

d'où $1-\hat{f}(s) = \frac{1-s}{1-s+s\theta}$ et

$$\hat{u}(s) = \frac{1-s+s\theta}{1-s} = 1 + \frac{s\theta}{1-s}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \theta s^n$$

Par identification des coefficients de la série entière, on a $u_0 = 0$ et $u_k = \theta$ pour tout $k \geq 1$.

(d) Comme $\hat{f}(1) = 1$, on a $1 - \hat{f}(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(1-s^k)$. On en déduit que

$$\frac{1-\hat{f}(s)}{1-s} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \frac{1-s^k}{1-s} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sum_{0\leq i<k} s^i = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} f_k 1\!\!1_{\{i<k\}} s^i.$$

Supposons provisoirement que $s \in [0,1[$: les termes sont positifs et on peut intervertir les deux sommes:

$$\frac{1-\hat{f}(s)}{1-s} = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k 1\!\!1_{\{i<k\}}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i \mathbb{P}(Y_1 > i).$$

En divisant par m, on obtient grâce à I.5.b:

$$\frac{1}{m}\frac{1-\hat{f}(s)}{1-s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi(i)s^i = \hat{\pi}(s).$$

Comme les fonctions $s \mapsto \frac{1}{m}\frac{1-\hat{f}(s)}{1-s}$ et $\hat{\pi}$ sont analytiques sur D, le principe du prolongement analytique permet de prolonger l'identité sur D.

5. La question n'est pas très claire. Excepté le II.4.d, les résultats demeurent valides si $m = +\infty$ ou $f_\infty > 0$.

Partie III

1. (a) (r_n) est le reste d'ordre n d'une série convergente, donc est de limite nulle, d'où l'existence de n_ε.

(b) Quitte à augmenter n_ε, on peut supposer que $i < n_\varepsilon$. D'après II.1, dès que $\phi(k) \geq n_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} u_{\phi(k)} &= f_i u_{\phi(k)-i} + \sum_{1\leq j\leq n_\varepsilon, j\neq i} f_j u_{\phi(k)-j} + \sum_{j=n_\varepsilon+1}^{\phi(k)} f_j u_{\phi(k)-j} \\ &\leq f_i u_{\phi(k)-i} + \sum_{1\leq j\leq n_\varepsilon, j\neq i} f_j u_{\phi(k)-j} + \sum_{j=n_\varepsilon+1}^{\phi(k)} f_j.1 \\ &\leq f_i u_{\phi(k)-i} + \sum_{1\leq j\leq n_\varepsilon, j\neq i} f_j u_{\phi(k)-j} + r_{n_\varepsilon} \end{aligned}$$

Par définition de la limite supérieure, il existe m_ε tel que $u_n \leq \lambda + \varepsilon$ pour $n \geq m_\varepsilon$. Choisissons k_ε tel que $\phi(k) \geq n_\varepsilon + m_\varepsilon$ et $u_{\phi(k)} \geq \lambda - \varepsilon$ pour $k \geq k_\varepsilon$ (Cette dernière condition est possible car $(u_{\phi(k)})$ converge vers λ.). Pour $k \geq k_\varepsilon$, on a alors

$$\lambda - \varepsilon \leq u_{\phi(k)} \leq f_i u_{\phi(k)-i} + \left(\sum_{1\leq j\leq n_\varepsilon, j\neq i} f_j\right)(\lambda+\varepsilon) + \varepsilon \leq f_i u_{\phi(k)-i} + (1-f_i)(\lambda+\varepsilon) + \varepsilon.$$

(c) On passe à la limite inférieure lorsque k tend vers $+\infty$ dans la deuxième inégalité: on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lambda \leq \varepsilon + (1-f_i)(\lambda+\varepsilon) + f_i \liminf_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-i}.$$

En faisant maintenant tendre ε vers 0, on a

$$\lambda \leq (1-f_i)\lambda + f_i \liminf_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-i},$$

soit $f_i\lambda \leq f_i \liminf_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-i}$.

Comme $f_i > 0$, on a $\liminf_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-i} \geq \lambda$, mais $\limsup_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-i} \leq \lambda$ (λ est la plus grande valeur d'adhérence), donc finalement

$$\lim_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-i} = \lambda.$$

2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers ℓ tels que $\ell > 0$ et $\lim_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-\ell} = \lambda$. Soit $\ell \in \mathcal{L}$ et $i \in \mathcal{A}$. On pose $\psi(k) = \phi(k) - \ell$. Comme $\ell \in \mathcal{L}$, $\lim_{k\to+\infty} \psi(k) = \lambda$. En appliquant le résultat de la question 2. à la suite $\psi(k)$, on a $\lim_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-\ell} = \lambda$, soit $\lim_{k\to+\infty} u_{\phi(k)-(\ell+i)} = \lambda$, ce qui montre que $\ell + i \in \mathcal{L}$. Ainsi, $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{A}$ et est stable par l'addition des éléments de $\mathcal{A}$: on en déduit que $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{A}_+$, ce qui montre le résultat voulu.

3. Si le pgcd des éléments de $\mathcal{G}$ est 1, on peut en extraire une famille finie dont le pgcd est 1. En effet, si on note d_k le pgcd des k plus petits, (d_k) est une famille décroissante d'entiers, donc sa borne inférieure est atteinte. Elle vaut nécessairement 1, sinon cela contredirait le fait que le pgcd des éléments de $\mathcal{G}$ est 1. Il existe donc p tel que $d_p = 1$, et des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ tels que le pgcd de $n_1, n_2, \ldots, n_p$ soit 1. D'après le lemme de Bezout, il existe des relatifs $a_1, \ldots a_p$ tels que $1 = \sum_{k=1}^{p} a_k n_k$. Posons $P = \sum_{p:a_p>0} a_p n_p$ et $N = \sum_{p:a_p<0} (-a_p) n_p$. On a $P \in \mathcal{G}_+, N \in \mathcal{G}_+$ et $1 = P - N$. Soit $n \geq n_0 = N(N-1)$. On peut écrire $n = bN + r$, avec $b \geq N - 1$ et $r \in \{0, 1, \ldots N - 1\}$. On a $n = bN + r = bN + r(P - N) = rP + (b - r)N \in \mathcal{G}_+$ car $b - r \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{G}_+$ est stable par addition. Ainsi, $\{n_0, n_0 + 1, \ldots\} \subset \mathcal{G}_+$.

4. (a) On suppose que n est suffisamment pour que $\phi(n) \geq N + n_0$. On a $1 = \sum_{j=0}^{\phi(n)-n_0} r_j u_{\phi(n)-n_0-j} \geq \sum_{j=0}^{N} r_j u_{n-j}$, donc

$$1 \geq \sum_{j=0}^{N} r_j u_{\phi(n)-n_0-j}.$$

Comme les $n_0 + j$ sont dans $\mathcal{A}_+$, on a pour tout j entre 0 et n: $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)-n_0-j} = \lambda$, d'où en passant à la limite dans l'inégalité:

$$1 \geq \lambda \sum_{j=0}^{N} r_j.$$

(b) En faisant tendre N vers l'infini, on obtient avec II.3.c:

$$1 \geq \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} r_j = \lambda m,$$

soit $\lambda \leq 1/m$, ce qui est ce qu'on voulait démontrer.

5. (a) D'après II.1, dès que $\psi(k) \geq N$, on a

$$\begin{aligned} u_{\psi(k)} &= f_i u_{\psi(k)-i} + \sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} f_j u_{\psi(k)-j} + \sum_{j=N+1}^{\psi(k)} f_j u_{\psi(k)-j} \\ &\geq f_i u_{\psi(k)-i} + \sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} f_j u_{\psi(k)-j} \end{aligned}$$

Par définition de la limite inférieure, il existe m_ε tel que $u_n \geq \nu - \varepsilon$ pour $n \geq m_\varepsilon$. Choisissons $k_{\varepsilon,N}$ tel que $\phi(k) \geq N + m_\varepsilon$ et $u_{\psi(k)} \leq \nu + \varepsilon$ pour $k \geq k_{\varepsilon,N}$ (Cette dernière condition est possible car $(u_{\psi(k)})$ converge vers ν.). Pour $k \geq k_{\varepsilon,N}$, on a alors

$$\nu + \varepsilon \geq u_{\psi(k)} \geq f_i u_{\psi(k)-i} + \left(\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} f_j \right) (\nu - \varepsilon) + \varepsilon.$$

Comme $f_i + \sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} f_j \geq \sum_{1\leq j\leq N,} f_j = 1 - r_N$, on a

$$\forall k \geq k_{\varepsilon,N} \quad \nu + \varepsilon \geq u_{\psi(k)} \geq f_i u_{\psi(k)-i} + (1 - f_i - r_N)(\nu - \varepsilon).$$

(b) En passant à la limite supérieure dans la 2e inégalité lorsque k tend vers l'infini, on obtient

$$\nu \geq f_i \limsup_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-i} + (1 - f_i - r_N)(\nu - \varepsilon).$$

Enfin, en faisant tendre N vers l'infini, puis ε vers 0, on a $\nu \geq f_i \limsup_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-i} + (1 - f_i)\nu$, d'où $f_i\nu \geq f_i \limsup_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-i}$.

Comme f_i est non-nul, on a $\nu \geq \limsup_{k\to+\infty}$. Mais $\liminf_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-i} \geq \nu$ (ν est la plus petite valeur d'adhérence), donc finalement

$\lim_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-i} = \nu.$

(c) En procédant comme en 2., on montre que $\lim_{k\to+\infty} u_{\psi(k)-i} = \nu$ pour tout $i \in \mathcal{G}_+$. Pour $n \geq N$, on a

$$1 = \sum_{j=0}^{N} r_j u_{n-j} + \sum_{j=N+1}^{n} r_j u_{n-j} \leq \sum_{j=0}^{N} r_j u_{n-j} + \sum_{j=N+1}^{+\infty} r_j.$$

On suppose que k est suffisamment pour que $\psi(k) \geq N + n_0$, on applique l'inégalité pour $n = \psi(k) - n_0$. On a

$$1 \leq \sum_{j=0}^{N} r_j u_{\psi(n)-n_0-j} + \sum_{j=N+1}^{+\infty} r_j.$$

Comme les $n_0 + j$ sont dans $\mathcal{A}_+$, on a pour tout j entre 0 et N: $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)-n_0-j} = \nu$, d'où en passant à la limite dans l'inégalité:

$$1 \leq \nu \sum_{j=0}^{N} r_j + \sum_{j=N+1}^{+\infty} r_j.$$

(d) En faisant tendre N vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient que $1 \leq \nu \sum_{j=0}^{N} r_j = \nu m$, soit $\nu \geq 1/m$.
Ainsi, on a $1/m \leq \nu = \liminf u_n \leq \limsup u_n = \lambda \leq 1/m$, ce qui montre que u_n tend vers $1/m$ lorsque $d(f) = 1$.
Passons au cas général. Si l'on pose $Y_i' = Y_i/d(f)$, on a

$$\begin{aligned} u_{nd(f)} &= \mathbb{P}(\exists k \geq 0 Y_1 + \dots Y_k = nd(f)) \\ &= \mathbb{P}(\exists k \geq 0 Y_1' + \dots Y_k' = n). \end{aligned}$$

Cette fois, l'hypothèse d'apériodicité est vérifiée, donc la suite converge vers $\mathbb{E}(Y_1')^{-1} = d(f)\mathbb{E}(Y_1)^{-1} = d(f)/m$.

Partie IV

1. C'est un résultat de cours classique. À l'aide de la propriété de Markov fort, on montre que les $(Z_k - Z_{k-1})$ sont des variables aléatoires iid.

2. (a) Comme $Y_k = Z_k - Z_{k-1}$, on a $S_n = Z_n$. On a

$$\{\exists k; S_k = n\} = \{\exists k; Z_k = n\} = \{n \in \{Z_k; k \geq 1\}\} = \{X_n = j\},$$

donc

$$u_n = \mathbb{P}(\exists k; S_k = n) = \mathbb{P}(X_n = j) = Q^n(j,j).$$

(b) La chaîne est irréductible. Sa période est la période de j, c'est à dire le pgcd des n tels que $Q^n(j,j) > 0$. Mais $Q^n(j,j) = u_n$, donc cette période est $d(u)$. D'après II.2, cette période coïncide avec $d(f)$, ce qui donne le résultat voulu

(c) X est récurrente si et seulement si $\mathbb{P}^j(Z_1 < +\infty) = 1$.
Or $\mathbb{P}^j(Z_1 < +\infty) = \mathbb{P}(Y_1 < +\infty) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = +\infty) = 1 - f_\infty$, donc X est récurrente si et seulement si $f_\infty = 0$. Par définition, X est récurrente si et seulement si $\mathbb{E}^j[Z_1] < +\infty$.
Comme $\mathbb{E}^j[Z_1] = \mathbb{E}[Y_1] = \sum_n nf_n$, X est récurrente positive et seulement si $m = \sum_n nf_n < +\infty$.

3. (a) Si $X_n = j$, on a $Z_1 \leq n$. Ainsi les événements $(\{Z_1 = k\} \cap \{X_n = j\})_{1 \leq k \leq n}$ forment une partition de $\{X_n = j\}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^i(X_n = j) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^i(Z_1 = k, X_n = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^i(Z_1 = k, X_n = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^i(Z_1 = k)\mathbb{P}^j(X_{n-k} = j)(\text{propriété de Markov forte}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}^i(Z_1 = k)Q^{n-k}(j,j)
\end{aligned}$$

On applique ici la propriété de Markov forte avec le temps d'arrêt Z_1.

(b) On a donc $Q^n(i,j) = \mathbb{E}^i[Q^{n-Z_1}1\!\!1_{\{Z_1 \leq n\}}]$. On a $|Q^{n-Z_1}1\!\!1_{\{Z_1 \leq n\}}| \leq 1$, $\mathbb{E}[1] < +\infty$, et presque sûrement $Q^{n-Z_1}1\!\!1_{\{Z_1 \leq n\}} \to 1/E^j(Z_1)$ quand n tend vers l'infini. Avec le théorème de convergence dominée, on voit que $Q^n(i,j)$ converge vers $1/E^j(Z_1)$ quand n tend vers l'infini.

4. Si la chaîne est récurrente positive, il y a une unique mesure invariante, donnée par $\mu(x) = \frac{1}{\mathbb{E}^x[T_x]}$ et qui charge tous les points. D'après le théorème ergodique des chaînes de Markov, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1\!\!1\{X_k = j\}$ converge $\mathbb{P}^i$ presque

sûrement vers $\mu(j)$, donc avec le théorème de convergence dominée, son espérance $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Q^k(i,j)$ converge vers $\mu(j)$.

Supposons que pour un certain couple (i,j) $Q^n(i,j)$ converge. En vertu du théorème de Cesaro et de ce qui précède, il converge vers $\mu(j)$. Comme $\mu(j) > 0$, on en déduit qu'il existe n_0 tel que $Q^n(i,j) > 0$ pour $n \geq n_0$. Comme la chaîne est irréductible, il existe p tel que $Q^p(j,i) > 0$: on a $Q^{n+p}(i,i) \geq Q^n(i,j)Q^p(j,i) > 0$. On a donc $Q^n(i,i) > 0$ pour tout $n \geq n_0 + p$, ce qui entraîne que la chaîne est apériodique.

Partie V

1. Posons $f_n^\rho = \rho^n f_n$. On a $d(f^\rho) = d(f) = 1$, donc d'après le théorème E-F-P, u_n^ρ converge vers $(\sum_k k f_k^\rho)^{-1} = (\sum_k k\rho^k f_k)^{-1}$. Pour $|s| < 1$, on a les relations

   - $\widehat{u}(s) = (1 - \widehat{f}(s))^{-1}$
   - $\widehat{u^\rho}(s) = (1 - \widehat{f^\rho}(s))^{-1}$
   - $\widehat{f^\rho}(s/\rho) = \widehat{f}(s)$

   On en déduit que $\widehat{u}(s) = \widehat{u^\rho}(s/\rho)$, d'où

$$u_n = \rho^{-n} u^\rho \sim \frac{\rho^{-n}}{\sum_k k\rho^k f_k}.$$

2. Si (u_n) est une suite de renouvellement, associée à (f_n), le raisonnement fait en IV.2.a et II.1 montrent que la matrice Q_f de la chaîne (A_n) du I associée à (f_n) vérifie

$$\forall k \geq 1 \quad Q_f^k(0,0) = f_k Q_f^0(0,0) + f_{k-1} Q_f p^1(0,0) + \dots f_1 Q_f^{k-1}(0,0).$$

   Comme $u_0 = Q_f^0(0,0) = 1$, il s'ensuit par récurrence que $u_n = Q_f^n(0,0)$.

   Maintenant, si (A_n, B_n) sont deux chaînes de Markov indépendantes associées aux suites de renouvellement (a_n), (b_n), on a

$$a_n b_n = \mathbb{P}((A_n, B_n) = (0,0)).$$

   $(A_n, B_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, et si l'on note $h_n = P(\tau = n)$ avec $\tau = \inf\{n \geq 0; A_n = B_n = 0\}$, le même raisonement qu'en IV.3.a nous donne

$$\mathbb{P}((A_n, B_n) = (0,0)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau = k)\mathbb{P}((A_{n-k}, B_{n-k}) = (0,0)),$$

   soit

$$a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} h_k a_{n-k} b_{n-k}.$$

Ainsi, $(a_n b_n)$ vérifie l'équation de renouvellement associée à h_n. Cependant, on a en général $\sum_{n\geq 1} h_n = \mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq 1$.

On va bâtir un contre-exemple. Soient $(S_n^1)_{n\geq 0}$,$(S_n^2)_{n\geq 0}$, $(S_n^3)_{n\geq 0}$, $(S_n^4)_{n\geq 0}$ des marches aléatoires simples indépendantes sur $\mathbb{Z}$: si je pose $a_n = \mathbb{P}((S_n^1, S_n^2) = (0,0))$, $\tau^2 = \inf\{n \geq 1; (S_n^1, S_n^2) = (0,0)\}$ et $\tau^4 = \inf\{n \geq 1; (S_n^1, S_n^2, S_n^3, S_n^4) = (0,0,0,0)\}$, j'ai les équations de récurrence

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau^2 = k) a_{n-k} \text{ et } a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau^4 = k) a_{n-k}^2.$$

Il est bien connu que $a_{2n} \sim \frac{1}{\pi n}$: la série des probabilités des retours est divergente, de telle sorte que la marche est récurrente, ce qui entraîne que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\tau^2 = n) = 1$: (a_n) est donc une suite de renouvellement.

Mais si u et f sont associées par une équation de renouvellement, on a à l'intérieur du disque unité $\hat{u}(s) = (1 - \hat{f}(s))^{-1}$, de sorte qu'à une suite u bornée, on peut associer au plus une solution de l'équation de renouvellement: la suite $\mathbb{P}(\tau^4 = k)$ est donc la seule suite que l'on peut associer à (a_n^2). Mais $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\tau^4 = n) = \mathbb{P}(\tau^4 < +\infty) < 1$ car la chaîne $(S_n^1, S_n^2, S_n^3, S_n^4)$ est transitoire: en effet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}((S_n^1, S_n^2, S_n^3, S_n^4) = (0,0,0,0)) < +\infty$$

car

$$\mathbb{P}((S_{2n}^1, S_{2n}^2, S_{2n}^3, S_{2n}^4) = (0,0,0,0)) \sim \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

et les termes impairs sont nuls.

Ainsi, si on veut démontrer le théorème proposé, il faut affaiblir la condition sur les f_n: il faut imposer qu'ils soient positifs, de somme majorée par 1 (ce qui revient à autoriser que $f_\infty > 0$, c'est à dire que f est une loi sur $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, et pas sur $\mathbb{N}^*$.

Pour des compléments sur le produit de suites de renouvellement, voir par exemple Gérard Letac, The Annals of Probability, Vol. 5, No. 4 (Aug., 1977), pp. 591-594

FIN