Sujet de Probabilités

Le sujet comporte 6 pages.

Si d est un entier naturel, on note $d\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de d, i.e.,

$$d\mathbb{N} = \{0, d, 2d, 3d, \dots\}.$$

On supposera que toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Dans toute la suite, on confond la loi f sur un ensemble fini ou dénombrable E et la suite $(f_i)_{i\in E}$ de nombres réels, indexée par E, telle que f_i est la probabilité du singleton $\{i\}$.

Dans tout le sujet, $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$. On note f sa loi, i.e., pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, $f_i = \mathbb{P}(Y_1 = i)$ et $f_\infty = \mathbb{P}(Y_1 = \infty)$. On pose $f_0 = 0$.

Ce problème étudie diverses propriétés de la suite de variables aléatoires $S = (S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

Le but de la partie I est de construire une chaîne de Markov à partir de cette suite de variables aléatoires, et d'étudier quelques propriétés de cette chaîne.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I, à l'exception de la question 4.d de la partie II. Elles sont consacrées à la démonstration du théorème d'Erdös, Feller et Pollard, énoncé en fin de partie III.

La partie IV propose d'utiliser ce théorème pour démontrer la convergence des lois marginales d'une chaîne de Markov vers la loi stationnaire, sous des hypothèses classiques.

La partie V est constituée de deux exercices sur les suites de renouvellement. Elle utilise les résultats précédemment démontrés.

– Partie I –

Dans cette partie, on suppose que $f_\infty = 0$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on introduit la variable aléatoire

$$\begin{aligned} A_n &= n - \max\Big(\big\{S_0, S_1, \dots\big\} \cap \big\{0, 1, \dots, n\big\}\Big) \\ &= n - \max\big\{S_k : k \in \mathbb{N}, S_k \leq n\big\}. \end{aligned}$$

1. Soit n un entier. Montrer que $A_n = 0$ si et seulement si il existe un entier $k \geq 0$ tel que $S_k = n$.

Pour un entier n, on pose $\tau(n) = \sup\big\{k \in \mathbb{N} : S_k \leq n\big\}$.

2. La variable aléatoire $\tau(n)$ est-elle un temps d'arrêt pour la filtration naturelle du processus $(S_k)_{k\geq 0}$?

On note Γ_n l'ensemble des $(n+1)$-uplets d'entiers $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $a_0 = 0$ et, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $a_{i+1} \in \big\{0, a_i + 1\big\}$.

3. Soit n un entier.
3.a. Montrer que $\mathbb{P}\Big((A_0, A_1, \dots, A_n) \in \Gamma_n\Big) = 1$ et que

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n + 1 & \text{si } Y_{\tau(n)+1} - A_n > 1, \\ 0 & \text{si } Y_{\tau(n)+1} - A_n = 1. \end{cases}$$

3.b. Soit D un événement de la tribu engendrée par les variables aléatoires $A_0, \dots, A_n$, notée $\mathscr{F}_n^A := \sigma(A_0, \dots, A_n)$. Montrer que, pour tous entiers $k \geq 0$ et $a \geq 0$, il existe un événement D_k de la tribu engendrée par S_0, S_1, …, S_k tel que

$$D \cap \{\tau(n) = k\} \cap \{A_n = a\} = D_k \cap \{\tau(n) = k\} \cap \{A_n = a\}.$$

3.c. Montrer que si $j > 0$ et $a \geq 0$ sont des entiers, et si $D \in \mathscr{F}_n^A$:

$$\mathbb{P}\Big(\big\{Y_{\tau(n)+1} - A_n = j\big\} \cap D \cap \big\{A_n = a\big\}\Big) = \mathbb{P}\big(Y_1 - a = j \,\big|\, Y_1 > a\big)\, \mathbb{P}\big(D \cap \{A_n = a\}\big).$$

3.d. En déduire que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, dont on précisera la loi initiale et la matrice de transition.

On note $K = \inf\big\{k : f_1 + \ldots + f_k = 1\big\}$, avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide est égal à l'infini.

4. Montrer que l'espace d'état de cette chaîne de Markov est $\{0, 1, 2, \dots, K-1\}$, et qu'elle est irréductible.

5. On suppose dans cette question que $\sum_n n f_n$ est convergente.
5.a. Montrer que l'état 0 est récurrent positif.
5.b. Calculer la loi stationnaire.

– Partie II –

On s'intéresse maintenant à la suite $u = (u_k)_{k\geq 0}$ définie pour tout entier k par

$$u_k = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, S_n = k).$$

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$u_k = f_k u_0 + f_{k-1} u_1 + \ldots + f_1 u_{k-1}.$$

On appelle période de la suite de réels positifs $x = (x_k)_{k\geq 0}$ le plus grand entier d tel que

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k > 0\} \subset d\mathbb{N}$$

et on le note $d(x)$.

2. Montrer que $d(u) = d(f)$.

Pour les questions 3. et 4., on suppose que Y_1 a une espérance finie, notée m, i.e.,

$$m := \sum_{n\geq 1} n f_n < \infty.$$

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $r_n = \mathbb{P}(Y_1 > n) = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots$.

3. Soit $n \geq 0$ un entier fixé et L_n la variable aléatoire

$$L_n = \max\Big(\big\{S_0, S_1, \ldots, S_n\big\} \cap \big\{0, 1, \ldots n\big\}\Big) = \max\big\{S_k : k \in \mathbb{N}, S_k \leq n\big\}$$

3.a. Pour tout entier ℓ entre 0 et n, calculer $\mathbb{P}(L_n = \ell)$.
3.b. En déduire que

$$1 = r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0.$$

3.c. Montrer que

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} r_n.$$

4. La fonction génératrice d'une suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes est définie, pour $s \in \mathbb{C}$, par

$$\hat{a}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

pourvu que la série soit convergente.
4.a. Montrer que le disque ouvert $D = \big\{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\big\}$ est toujours inclus dans l'ensemble de définition de $\hat{f}$ et dans celui de $\hat{u}$.
4.b. Montrer que, pour tout $s \in D$, $\hat{u}(s) = \big(1 - \hat{f}(s)\big)^{-1}$.
4.c. Soit $\theta \in]0; 1[$. Calculer la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ si f est la loi géométrique de paramètre θ, i.e., si pour tout entier $n \geq 1$, $f_n = \theta(1-\theta)^{n-1}$.

4.d. Montrer que la fonction génératrice de la loi stationnaire $\pi = (\pi_n)_{n\geq 0}$ de la chaîne $(A_n)_{n\geq 0}$, introduite dans la question 4.b. de la partie I, vérifie

$$\hat{\pi}(s) = \frac{1}{m}\,\frac{\hat{f}(s)-1}{s-1}.$$

pour tout $s \in D$.

5. Les résultats des questions 3. et 4. sont-ils vrais lorsque Y_1 n'est pas intégrable, i.e. $m = \infty$? (Justifier les réponses).

– Partie III –

Dans cette partie, on suppose que Y_1 est intégrable, et on note encore $m = \sum_{n\geq 1} n f_n$. Le but de cette section est d'obtenir des propriétés asymptotiques pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soit $\lambda = \limsup_{k\to\infty} u_k$ la limite supérieure de la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ et $(u_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ une suite extraite telle que

$$\lim_{k\to\infty} u_{\varphi(k)} = \lambda.$$

1. Soit $i > 0$ un entier tel que $f_i > 0$.
1.a. Montrer qu'il existe un entier $n_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on a $r_n < \varepsilon$.
1.b. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $k_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_\varepsilon$, on a

$$\lambda - \varepsilon \leq u_{\varphi(k)} \leq \varepsilon + (1-f_i)(\lambda+\varepsilon) + f_i u_{\varphi(k)-i}.$$

1.c. En déduire que $\lim_{k\to\infty} u_{\varphi(k)-i} = \lambda$.

Pour une partie $\mathscr{G}$ de $\mathbb{N}$, on note $\mathscr{G}_+$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires $a_1g_1 + \ldots + a_ng_n$ où $g_i \in \mathscr{G}$ et $a_i \in \mathbb{N}^\star$. C'est la plus petite partie de $\mathbb{N}$ stable par addition et qui contient tous les éléments de $\mathscr{G}$.

2. Soit $\mathscr{A} = \{i > 0 : f_i > 0\}$. Montrer que, pour tout $\ell \in \mathscr{A}_+$, $\lim_{k\to\infty} u_{\varphi(k)-\ell} = \lambda$.

3. Soit $\mathscr{G}$ une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que le plus grand entier d tel que $\mathscr{G} \subset d\mathbb{N}$ est 1. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\{n_0, n_0+1, \ldots\} \subset \mathscr{G}_+$.

Pour les questions 4., 5. et 6., on suppose que $d(f) = 1$.

4.a. Avec le résultat de la question 3.b de la partie II, montrer que pour tout entier N, on a

$$1 \geq \lambda \sum_{j=0}^{N} r_j.$$

4.b. En déduire que $\limsup_{k\to\infty} u_k \leq 1/m$.

Soit maintenant $\nu = \liminf_{k\to\infty} u_k$ et $(u_{\psi(k)})_{k\geq 0}$ une suite extraite qui converge vers ν.

5. Soit $i > 0$ un entier tel que $f_i > 0$.
5.a. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe un rang $k_{\varepsilon,N}$ tel que, pour tout $k \geq k_{\varepsilon,N}$,

$$\nu + \varepsilon \geq u_{\psi(k)} \geq (1 - f_i)(\nu - \varepsilon) - r_N(\nu - \varepsilon) + f_i u_{\psi(k)-i}.$$

5.b. En déduire que $\lim_{k\to\infty} u_{\psi(k)-i} = \nu$.

6. Montrer que, pour tout entier N,

$$1 \leq \nu \sum_{j=0}^{N} r_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} r_j.$$

7. En déduire le théorème suivant. (On pourra commencer par traiter le cas $d(f) = 1$).

> **Theorème d'Erdös, Feller et Pollard.** Si $d(f)$ est la période de la suite f et $m = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n < \infty$, alors la suite $(u_{nd(f)})_{n\geq 0}$ converge vers $d(f)/m$ lorsque $n \to \infty$.

– Partie IV –

Soit E un ensemble fini ou dénombrable et $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $(\Omega, \mathscr{F})$ d'espace d'état E, de matrice de transition $Q = \big(Q(i,j)\big)_{i,j\in E}$. On définit par récurrence les matrices itérées de Q par $Q^{n+1} = Q^n \times Q$.

On suppose que la chaîne X est irréductible. Pour tout état $i \in E$, on note $\mathbb{P}_i$ la mesure de probabilité telle que $\mathbb{P}_i(X_0 = i) = 1$ et $\mathbb{E}_i(.)$ l'espérance sous $\mathbb{P}_i$.

Fixons deux états $i, j \in E$. Le but de cette section est d'utiliser le théorème d'Erdös, Feller et Pollard pour montrer que $Q^n(i,j)$ converge quand $n \to \infty$.

On définit les temps de retours successifs en j par

$$\begin{cases} Z_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}, \\ Z_{k+1} = \inf\{n \geq Z_k + 1 : X_n = j\} \quad \text{pour tout entier } k \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que, si l'état initial de la chaîne de Markov X est j, alors la suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ est constituée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

2. On choisit $Y_k = Z_k$ pour tout entier k.
2.a. Si j est l'état initial de la chaîne de Markov X, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ introduite dans la partie II vérifie

$$u_n = Q^n(j,j).$$

2.b. Montrer que la chaîne X est apériodique si et seulement si $d(f) = 1$.
2.c. Montrer que la chaîne X est récurrente si et seulement si $f_\infty = 0$, et que la chaîne X est récurrente positive si et seulement si $\sum_n n f_n < \infty$.

3. On suppose dans cette question que la chaîne X est apériodique et récurrente positive. Le théorème d'Erdös, Feller et Pollard montre alors que $Q^n(j,j)$ converge vers $1/\mathbb{E}_j(Z_1)$.
3.a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$Q^n(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(Z_1 = k) Q^{n-k}(j,j).$$

3.b. En conclure que $Q^n(i,j)$ converge vers $1/\mathbb{E}_j(Z_1)$ quand $n \to \infty$.

4. Quel est le comportement de $Q^n(i,j)$ quand $n \to \infty$ si la chaîne est récurrente positive, mais périodique de période d ?

– Partie V –

1. On suppose que $f_\infty > 0$, $d(f) = 1$ et qu'il existe un réel positif ρ tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n f_n = 1 \text{ et } \sum_n n\rho^n f_n < \infty.$$

Donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$.

2. Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels est une suite de renouvellement s'il existe une loi $g = (g_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{N}^\star$ telle que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = g_n a_0 + g_{n-1} a_1 + \ldots + g_1 a_{n-1}.$$

Montrer que, si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites de renouvellement, alors la suite $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ est une suite de renouvellement.

Fin de l'épreuve