C30121

Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3ème année**
Mathématiques
Session 2010

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé .

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Préambule

L'objectif du problème est d'étudier certaines propriétés des séries de Dirichlet, et particulièrement leurs diverses abscisses de convergence.
On appelle série de Dirichlet toute série de fonctions de la variable complexe s de la forme $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes. Ces séries jouent un rôle important en arithmétique.
On rappelle les deux résultats suivants, qui pourront être utilisés librement :

1. **Convergence des suites de fonctions holomorphes.** Si Ω est un ouvert de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$, convergeant vers une application f de Ω dans $\mathbb{C}$, uniformément sur tous les compacts inclus dans Ω, alors l'application f est holomorphe dans Ω.
2. **Théorème de Banach-Steinhaus pour les formes bilinéaires.** Soient E et F deux espaces de Banach, et $(L_i)_{i\in\mathcal{F}}$ une famille de formes bilinéaires continues sur $E\times F$. On suppose que, pour tout $(x,y)\in E\times F$, $\sup\{|L_i(x,y)|;\ i\in\mathcal{F}\}$ est fini. Alors $\sup\{\|\!|L_i|\!\|;\ i\in\mathcal{F}\}$ est fini. On rappelle que
$$\|\!|L_i|\!\| = \sup\{|L_i(x,y)|;\ x\in B_E,\ y\in B_F\}$$
où B_E (resp. B_F) désigne la boule unité de E (resp. de F).

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I - Abscisse de convergence, abscisse de convergence absolue

Pour une série de Dirichlet $f(s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, on définit les ensembles
$$A_c(f)=\left\{x\in\mathbb{R};\ \sum_{n\geq 1} a_n n^{-x} \text{ converge}\right\} \text{ et } A_a(f)=\left\{x\in\mathbb{R};\ \sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-x} \text{ converge}\right\}.$$
On définit ensuite les abscisses de convergence $\sigma_c(f)$ et de convergence absolue $\sigma_a(f)$ par
$$\sigma_c(f)=\inf\big(A_c(f)\big),\quad \sigma_a(f)=\inf\big(A_a(f)\big)$$
avec les conventions habituelles $\inf(\varnothing)=+\infty$ et la borne inférieure d'un ensemble non minoré vaut $-\infty$.

I.A. Le cas réel.

I.A.1. Calculer les abscisses de convergence et de convergence absolue dans les cas suivants :
$$\sum_{n\geq 1} n!\,n^{-s},\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^{-s}}{n!},\ \sum_{n\geq 1} n^{-s},\ \sum_{n\geq 1}(-1)^n n^{-s},\ \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} n^{-s}.$$

I.A.2. Montrer que $A_c(f)$ et $A_a(f)$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ illimités à droite (indication : effectuer une transformation d'Abel).

I.A.3. Montrer que $\sigma_c(f) \leq \sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$.

I.B. Le cas complexe.

Pour $\varphi \in]0, \pi/2[$ et $s_0 \in \mathbb{C}$, on désigne par $S_{s_0}(\varphi)$ l'ensemble des nombres complexes z de la forme $s_0 + re^{i\theta}$, avec $r \geq 0$ et $|\theta| \leq \varphi$.

I.B.1. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et non majorée. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z} \right| \leq |z| \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{-t\mathrm{Re}(z)} dt \leq \frac{|z|}{\mathrm{Re}(z)}.$$

I.B.2. Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in]0, \pi/2[$. Soit également $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$. Prouver que si f converge en s_0, alors elle converge uniformément dans $S_{s_0}(\varphi)$.

I.B.3. En déduire que $\sigma_c(f) = \inf\{\mathrm{Re}(s);\ \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge}\}$ et que f définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c(f)$.

Partie II - Abscisse de convergence du produit

II.A. Préliminaires : un lemme de Kronecker.

II.A.1. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge et soit $(\beta_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. Montrer que

$$\frac{\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n}{\beta_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

(indication : on pourra commencer par effectuer une transformation d'Abel en introduisant le reste de $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$).

On considère une suite de nombres complexes $(c_n)_{n\geq 1}$, $\alpha > 0$ et on pose $S_N = c_1 + \cdots + c_N$.

II.A.2. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} c_n n^{-\alpha}$ converge, alors $S_N N^{-\alpha}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

II.A.3. Réciproquement, si $S_N N^{-\alpha}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, montrer que $\sum_{n\geq 1} c_n n^{-\alpha-\varepsilon}$ converge pour tout $\varepsilon > 0$. Est-ce encore vrai si $\varepsilon = 0$?

Pour $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ et $g(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ deux séries de Dirichlet, on définit leur produit comme la série de Dirichlet $h(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$ où $c_n = \sum_{ij=n} a_i b_j$. h est le "produit formel" de f et g. On souhaite dans la suite évaluer l'abscisse de convergence de

h en fonction de celles de f et de g, et relier les fonctions h et fg sur leur domaine de définition.

II.B. Une des séries converge absolument.

On suppose que f converge absolument en 0 et que g converge en 0. On note, pour $x \geq 0$, $B(x) = \sum_{n \leq x} b_n$ avec la convention $B(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$.

II.B.1. Soit $x \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{n \leq x} c_n = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i B(x/i).$$

II.B.2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} c_n$ converge et que

$$\sum_{n \geq 1} c_n = \left(\sum_{n \geq 1} a_n \right) \left(\sum_{n \geq 1} b_n \right).$$

II.B.3. Plus généralement, soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et f et g deux séries de Dirichlet telles que $\sigma_a(f) \leq \sigma$ et $\sigma_c(g) \leq \sigma$. Montrer que l'abscisse de convergence de la série produit h est inférieure ou égale à σ et que $h(s) = f(s)g(s)$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.

II.C. Cas général.

On considère $f(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ et $g(s) = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}$ deux séries de Dirichlet qui convergent en 0. On note $h(s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$ leur série produit, et $S_N = c_1 + \cdots + c_N$, $N \geq 1$.

II.C.1. Montrer que

$$S_N = \left(\sum_{i \leq \sqrt{N}} a_i \right) \left(\sum_{j \leq \sqrt{N}} b_j \right) + \sum_{i \leq \sqrt{N}} a_i \left(\sum_{\sqrt{N} < j \leq \frac{N}{i}} b_j \right) + \sum_{j \leq \sqrt{N}} b_j \left(\sum_{\sqrt{N} < i \leq \frac{N}{j}} a_i \right).$$

II.C.2. En déduire que $S_N N^{-1/2}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

II.C.3. Montrer que l'abscisse de convergence de h est inférieure ou égale à $1/2$.

II.C.4. Montrer que $h(s) = f(s)g(s)$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ (on pourra utiliser les résultats de la partie II.B. et de la partie I).

II.D. Optimalité.

On souhaite démontrer qu'on ne peut pas faire mieux que le nombre $1/2$ trouvé à la question précédente. Pour cela, on introduit E, l'espace des suites complexes $a = (a_n)_{n \geq 1}$ telles que la série $\sum_{k \geq 1} a_k$ converge. On munit E de la norme $\|(a_n)\| = \sup_{n \geq 1} |\sum_{k=1}^{n} a_k|$.

II.D.1. Montrer que E est un espace de Banach.

On fixe $\alpha > 0$ tel que, pour toutes séries de Dirichlet f et g convergentes en 0, la série produit converge en α. On introduit les formes bilinéaires continues $(L_N)_{N\geq 1}$ sur $E \times E$ définies par

$$L_N(a,b) = \frac{c_1 + \cdots + c_N}{N^\alpha}$$

où $a, b \in E$ et $c_n = \sum_{ij=n} a_i b_j$.

II.D.2. Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que $|L_N(a,b)| \leq M\|a\| \cdot \|b\|$ pour tout $(a,b) \in E^2$ et tout $N \geq 1$.

Soit N un entier non nul qui est un carré parfait, i.e. $N = m^2$ avec m entier. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$, on note $\lambda_i = \left[\frac{N}{i}\right]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x. Comme précédemment, pour $b \in E$ et $x \geq 0$, on pose $B(x) = \sum_{n \leq x} b_n$ avec la convention $B(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$.

II.D.3. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_i B(\lambda_i)\right| \leq M N^\alpha \|a\| \cdot \|b\|.$$

II.D.4.

II.D.4.a. Soient $1 \leq i < j \leq m$. Montrer que $\lambda_i \neq \lambda_j$.

II.D.4.b. Soient $1 \leq i \leq m < k \leq N$. Montrer que $\lambda_i \neq \lambda_k$.

II.D.4.c. Soit $a \in E$. Déduire des questions précédentes qu'il existe $b \in E$ avec $a_i B(\lambda_i) = |a_i|$ si $i \leq \sqrt{N}$, $B(\lambda_k) = 0$ si $\sqrt{N} < k \leq N$ et $\|b\| \leq 1$.

II.D.5. En choisissant $a_i = (-1)^i$, $i \leq \sqrt{N}$, $a_i = 0$ sinon, montrer que $\alpha \geq 1/2$.

Partie III - Abscisse de convergence uniforme

Pour $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet, on définit son abscisse de convergence uniforme $\sigma_u(f)$ par

$$\sigma_u(f) = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R};\ \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge uniformément dans le demi-plan } \mathrm{Re}(s) > \sigma \right\}.$$

Il est clair que l'on a $\sigma_c(f) \leq \sigma_u(f) \leq \sigma_a(f)$. Dans la suite du problème, on souhaite contrôler l'abscisse de convergence absolue par l'abscisse de convergence uniforme, et relier l'abscisse de convergence uniforme au fait que la série de Dirichlet est bornée dans un demi-plan.

III.A. Une première inégalité.

Soit $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet qui converge uniformément sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \sigma$.

III.A.1. Prouver que, pour chaque $N \geq 1$, il existe une constante M (qui peut dépendre de N) telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma+it}}\right| \leq M.$$

III.A.2. Prouver qu'il existe une constante M telle que, pour tout $N \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma+it}}\right| \leq M.$$

III.A.3. Soit $N \geq 1$ et $T > 0$. Montrer que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1\leq n<m\leq N} \frac{a_n\overline{a_m}\sin\big(T\ln(m/n)\big)}{(nm)^{\sigma}T\ln(m/n)}\right).$$

III.A.4. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n\geq 1}|a_n|^2 n^{-2\sigma}$ est convergente.

III.A.5. Conclure que $\sigma_a(f) \leq \sigma_u(f) + 1/2$.

III.B. Deux inégalités de Landau.

III.B.1. Soit $\sigma > 0$, $\omega > 0$, $M > 0$ et $x > 0$.

III.B.1.a. Soit R le (bord du) rectangle de sommets $\sigma - \omega i$, $\sigma + \omega i$, $-M + \omega i$ et $-M - \omega i$, orienté dans le sens trigonométrique. Montrer que

$$\int_R \frac{e^{xz}}{z} dz = 2\pi i.$$

III.B.1.b. En déduire que

$$\left|\int_{\sigma-\omega i}^{\sigma+\omega i} \frac{e^{xz}}{z} dz - 2\pi i\right| \leq \frac{2}{\omega} \times \frac{e^{x\sigma}}{x}.$$

III.B.2. On suppose désormais $x < 0$. Montrer que

$$\left|\int_{\sigma-\omega i}^{\sigma+\omega i} \frac{e^{xz}}{z} dz\right| \leq \frac{2}{\omega} \times \frac{e^{x\sigma}}{|x|}.$$

III.C. Abscisse de convergence uniforme.

III.C.1. Soit f une série de Dirichlet d'abscisse de convergence uniforme finie. Montrer que f est bornée dans tout demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_u(f) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Dans la fin du problème, on démontre une "réciproque" à cette propriété. Précisément, soit $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence finie. On suppose que f définit une fonction analytique bornée dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq \beta$ avec $\beta \geq 0$. On va prouver que la série $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge uniformément dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq \beta + \delta$ pour tout $\delta > 0$.

On note α l'abscisse de convergence absolue de f. Si $\beta \geq \alpha$, le résultat est clair et on peut donc supposer $\alpha > \beta$.

On fixe $\delta \in]0,1[$ et $N \geq 2$. On pose

$$g(z) = \frac{f(z)(N+1/2)^{z-s}}{z-s}$$

où s est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) \geq \beta + \delta$. Soit enfin Γ le rectangle de sommets $A_1 = s - \delta - iN^{\alpha-\beta+2}$, $A_2 = s + \alpha - \beta - iN^{\alpha-\beta+2}$, $A_3 = s + \alpha - \beta + iN^{\alpha-\beta+2}$, $A_4 = s - \delta + iN^{\alpha-\beta+2}$, orienté dans le sens trigonométrique.

III.C.2. Justifier que $\int_\Gamma g(z)dz = 2\pi i f(s)$.

III.C.3. Démontrer qu'il existe une constante $M_1 > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) \geq \beta + \delta$, on a

$$\left| \int_{A_4}^{A_1} g(z)dz \right| \leq M_1 N^{-\delta} \ln(N).$$

III.C.4. Démontrer qu'il existe deux constantes $M_2, M_3 > 0$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) \geq \beta + \delta$, on a

$$\left| \int_{A_3}^{A_4} g(z)dz \right| \leq M_2 N^{-2} \text{ et } \left| \int_{A_1}^{A_2} g(z)dz \right| \leq M_3 N^{-2}.$$

III.C.5. On pose

$$u_k(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_{A_2}^{A_3} \frac{(N+1/2)^{z-s}}{k^{z-s}(z-s)} dz - 2\pi i & \text{si } k \leq N \\ \displaystyle\int_{A_2}^{A_3} \frac{(N+1/2)^{z-s}}{k^{z-s}(z-s)} dz & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que

$$\int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k \leq N} a_k k^{-s} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k^{-s} u_k(s).$$

III.C.6. En déduire qu'il existe une constante $M_4 > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) \geq \beta + \delta$, on a

$$\left| \int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k \leq N} a_k k^{-s} \right| \leq M_4 N^{-\delta} \ln(N).$$

III.C.7. Conclure.

Fin de l'épreuve