

Rapport sur l'épreuve d'analyse numérique du concours 3ème année de l'ENS Cachan - Session 2009

Le sujet portait sur la régularisation de fonctions représentées par leurs valeurs en une dimension d'une part (3ème partie) à l'aide de la transformée de Fourier discrète et en dimension supérieure d'autre part (5ème et 6ème parties) en se fondant sur des techniques de type équation de la chaleur, ce qui nécessite l'étude du spectre du Laplacien discret. Ces résultats sont très utilisés en traitement du signal, notamment pour lisser ou débruiter des enregistrements sonores, des images numériques, etc.

La 2ème partie, consacrée à la preuve d'un lemme de stricte convexité et la 4ème partie, qui menait à la démonstration du théorème de Perron-Frobenius, permettaient d'établir des résultats utiles dans la suite du sujet, qui faisait ainsi appel à un large éventail de notions de base sur les nombres complexes, l'algèbre linéaire ou l'analyse des suites vectorielles, et par suite, sur les schémas numériques pour les équations différentielles ordinaires.

Les notions requises par l'énoncé ont manifestement été comprises par l'ensemble des candidats, mais elles ne sont pas nécessairement maîtrisées. En règle générale, il est à déplorer que les candidats ne portent pas plus de soin à leur copie tant sur l'aspect de la présentation que sur celui de la rédaction, ni aux notations données par l'énoncé, ce qui leur est forcément préjudiciable. De plus, même si un dessin ne constitue pas une démonstration, il est souvent apprécié lors d'explications demandant des illustrations.

Revenons en détail sur le traitement des différentes parties par les candidats :

- *Partie II* : Peu de candidats ont formulé correctement la démonstration du lemme, qui nécessitait un dessin pour une bonne compréhension de la question. Il s'agissait en fait d'établir la stricte convexité de la boule euclidienne dans le plan.
- *Partie III* : L'erreur de notation du début a été corrigée naturellement par les candidats, qui ont en majorité résolu les quatre premières questions. La justification, préliminaire aux calculs, de l'inversibilité de Φ à l'aide de l'argument de matrice de Vandermonde a été très appréciée. Quand elles ont été abordées, les dernières questions ont montré que les candidats avaient compris l'enjeu de l'hypothèse et la référence au lemme préliminaire.
- *Partie IV* : Il s'agissait de montrer le théorème de Perron-Frobenius. Un des écueils, malheureusement pas toujours évité, était que la notion d'ordre définie dans le texte n'était pas total. Il est à noter que certains candidats affirment que les matrices réelles ont un spectre réel, et par conséquent des vecteurs propres associés réels, ce qui menait dans cette partie à des inégalités grossièrement fausses. La notion de norme infinie n'est pas toujours maîtrisée. Par ailleurs, la stricte positivité du rayon spectral a été bien traitée par la moitié des candidats, qui ont naturellement pensé au théorème de Cayley-Hamilton ou à la trace. En règle générale, la majorité des candidats a abordé jusqu'à la question IV.8 à l'exception des questions IV.e-f. Les très bons candidats ont pensé à réutiliser le lemme préliminaire pour montrer que y et $|y|$ étaient colinéaires. Dans

la suite, il est étonnant de constater qu'un certain nombre de candidats pensent que les noyaux d'une matrice et de sa transposée sont égaux. Enfin, lorsque l'explicitation de la puissance de B a été entreprise, la majorité a pensé à la formule du binôme de Newton en en justifiant correctement l'usage par le fait que A et P commutent.

- *Partie V* : La plupart des candidats ont compris la notion de graphe connexe comme l'ont prouvé les réponses à la première question. Pour ceux qui sont arrivés à la question 4, dernière vraiment abordée dans cette partie, le lien avec la matrice d'adjacence Π définie dans la première partie a été bien exploité.
- *Partie VI* : Seuls deux candidats ont effectivement donné l'expression de la matrice du schéma d'Euler explicite et c'est la seule question qui a été traitée dans cette partie.