La partie **III.** et la partie **IV.** sont complètement indépendantes.

I. Modélisation du problème et notations

On s'intéresse dans ce problème à des graphes de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \{1,2,3\}$), qui consistent en une partie topologique, notée $G = (S, A, F)$, et une réalisation géométrique, notée $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{F})$. La topologie G est constituée

- de *sommets* numérotés $S = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$, avec $n \geq 3$,

- d'*arêtes*, qui forment un sous-ensemble A de $(S \times S) \setminus \{(i,i), i \in \{1, \ldots, n\}\}$; on suppose que A est **symétrique**, c'est à dire

$$(i,j) \in A \Longleftrightarrow (j,i) \in A,$$

  et qu'**il n'y a pas de point isolé**, c'est-à-dire que $\forall i \in S$, $\exists j \in S, j \neq i/(i,j) \in A$,

- et, dans le cas où $d \geq 2$, d'un ensemble F de *faces*, qui sont des triplets $(i,j,k)_{i,j,k \in S, i<j<k}$ satisfaisant l'hypothèse de compatibilité

$$(i,j,k) \in F \Longrightarrow (i,j), (j,k), (k,i) \in A.$$

  On suppose **alors qu'il n'y a pas d'arête isolée**, c'est à dire que

$$\forall (i,j) \in A, \exists k \in S/(i,j,k) \in F$$

  et qu'une arête ne peut pas appartenir à plus de deux faces. Par souci de compatibilité, on convient que $F = \emptyset$ si $d = 1$.

On représente l'ensemble A par une matrice $\Pi \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ telle que

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On dira que le graphe est *connexe* si, pour tout couple de sommets (i,j), il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, \ldots, i_p) \in S^p$ tels que (i, i_1), (i_1, i_2), …, (i_{p-1}, i_p), (i_p, j) soient des arêtes.

La réalisation géométrique $\mathcal{G}$ est la représentation $\mathcal{S} = \{x_i \in \mathbb{R}^d / i \in S\}$ des points dans l'espace $\mathbb{R}^d$, ce qui donne un maillage

$$\text{si } d = 1 : \mathcal{A} = \bigcup_{(i,j) \in A} \mathrm{Conv}(x_i, x_j) \subset \mathbb{R}$$

$$\text{si } d = 2 \text{ ou } 3 : \mathcal{F} = \bigcup_{(i,j,k) \in F} \mathrm{Conv}(x_i, x_j, x_k) \subset \mathbb{R}^d$$

où l'enveloppe convexe de deux (respectivement trois) points $\mathrm{Conv}(x,y)$ (resp. $\mathrm{Conv}(x,y,z)$) est le segment (resp. triangle euclidien) de sommets x et y (resp. x, y et z).

On définit une fonction à valeurs réelles sur un graphe par ses valeurs en les points

$$f : x_i \in \mathcal{S} \mapsto f(x_i)$$

que l'on identifie, à l'aide de la bijection naturelle ϕ entre $\mathcal{S}$ et S définie par $\phi : x_i \in \mathcal{S} \mapsto i \in S$, à une fonction sur les sommets

$$\tilde{f} : i \in S \mapsto \tilde{f}_i = f(x_i)$$

et, en omettant les $\tilde{}$ pour simplifier les notations, f est finalement représentée par un vecteur $f = (f_i)_{i\in S} \in \mathbb{R}^n$.

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathcal{M}_n$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ou complexes (resp. réels). Pour tout vecteur-colonne x (resp. pour toute matrice M), on désigne par x_i ou $[x]_i$ (resp. M_{ij} ou $[M]_{ij}$) le i^{e} coefficient (resp. le coefficient de la ligne i et de la colonne j). On note $\mathbb{1} = {}^t(1, \ldots, 1)$, où ^{t} représente la transposée.

II. Lemme préliminaire

Soient $m \in \mathbb{N}$, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq m} \in [0,1]^m$, tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, et $(z_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{C}^m$, tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $|z_i| = 1$. Soit $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i$. On suppose que $|z| = 1$. Montrer que l'on a $z_i = z$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

III. Graphe uniforme en dimension 1

Soit un graphe G à n sommets représentés par n points $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ du segment $[0, 1]$ (voir figure 1). On suppose que le graphe est *périodique*, c'est-à-dire que l'on identifie x_n à x_0, et *uniforme*, c'est-à-dire que, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_{j+1} - x_j| = \dfrac{1}{n}$.

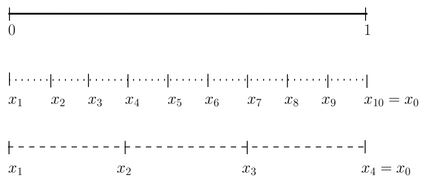

FIG. 1 – Exemples de réalisations $\mathcal{G}$ de graphes G

Soit $f \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on note $j \,\%\, n$ l'unique entier $r \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $j = qn+r$, avec $q \in \mathbb{Z}$. Par abus de notation, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on note $f_j = f_{j\,\%\,n}$. Ainsi $f_0 = f_n$. Soit $v = (v_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ un vecteur à coefficients positifs tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = n$. On lui associe alors la matrice V dans $\mathcal{M}_n$ définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad V_{ij} = \frac{v_{i-j}}{n} \tag{1}$$

III.1 **Cas particulier de vecteur** v : Soient $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction supposée périodique de période 1 et le vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ défini par : $\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \ h_j = H(x_j)$. Donner la matrice V_T et le vecteur v_T associé tels que $[V_T h]_j \,/\, n$ soit l'approximation de l'intégrale de H sur $[x_j, x_{j+1}]$ par l'aire d'un trapèze pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Que dire du vecteur v_R représentant la méthode des rectangles à gauche sur $[x_j, x_{j+1}]$?

Rappel : Dans la figure 2 sont illustrées la méthode des trapèzes (hachures à 45 degrés) et la méthode des rectangles à gauche (hachures à -45 degrés).

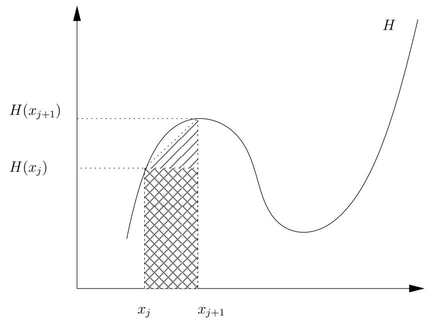

Fig. 2 – Rappel sur les méthodes des trapèzes et des rectangles à gauche

On appelle $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n^{e} de l'unité, notées $\omega_j = \exp(2ij\pi/n)$, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. On définit la transformée de Fourier discrète $\Phi(f)$ de f comme étant le vecteur tel que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ [\Phi(f)]_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k \omega_j^k.$$

III.2 Vérifier que la transformée de Fourier discrète inverse d'un vecteur $h \in \mathbb{C}^n$ est donnée par

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ [\Phi^{-1}(h)]_k = \sum_{j=1}^{n} h_j \omega_k^{-j}.$$

III.3 Montrer que, pour tous vecteurs f, g de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \ \Big[\Phi^{-1}\big(\,(\Phi(f)_j \times \Phi(g)_j)_{j \in \{1,\ldots,n\}}\big)\Big]_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_j\, g_{k-j}.$$

Soient $v \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = n$ et V la matrice associée définie à l'aide de la formule (1).

III.4 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\big[\Phi(V^p f)\big]_j = \big([\Phi(v)]_j\big)^p\ \Phi(f)_j$.

Pour les trois questions suivantes, on suppose de plus qu'il existe $(k,k') \in \{1,\dots,n\}^2$, $k<k'$, tels que $k'-k$ est premier avec n, et que $v_k \neq 0$ et $v_{k'} \neq 0$.

III.5 Pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \left([\Phi(v)]_j\right)^p$.

III.6 Montrer alors que

$$\lim_{p\to+\infty} V^p f = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j\right)\mathbb{1}.$$

III.7 Quelle interprétation en terme de régularisation donner de ce résultat ?

IV. Théorèmes de Perron-Frobenius

Introduisons quelques notations :

- pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ (resp. $x > 0$) représente un vecteur à coefficients positifs (resp. strictement positifs), et pour $(z,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $z \geq y$ (resp. $z > y$) signifie $z - y \geq 0$ (resp. $z - y > 0$),
- pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$ (respectivement $A > 0$) représente une matrice à coefficients positifs (resp. strictement positifs), et pour $(B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \geq C$ (resp. $B > C$) signifie $B - C \geq 0$ (resp. $B - C > 0$),
- pour $A \in \mathcal{M}_n$ (resp. $x \in \mathbb{C}^n$), $|A|$ (resp. $|x|$) est la matrice de coefficients $|A_{ij}|$ (resp. le vecteur de coefficients $|x_i|$),
- pour $A \in \mathcal{M}_n$, le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de A,
- pour $A \in \mathcal{M}_n$, $\rho(A)$ est le rayon spectral, c'est à dire le maximum en module du spectre de A, et $\|A\|_\infty$ est la norme subordonnée à la norme infinie, c'est-à-dire

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

  où, pour $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|,\ i \in \{1,\dots,n\}\}$.

On dit qu'une valeur propre est *simple* si elle est racine simple du polynôme caractéristique de A. On rappelle que, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n$, on a

$$\rho(M) = \lim_{p\to+\infty} \|M^p\|^{1/p}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A > 0$.

IV.1 Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \geq 0$. Montrer que $Ax > 0$.

IV.2 Montrer que $\rho(A) > 0$ et que $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathbb{C}^n$ tels que $|\lambda| = \rho(A)$ et $Ay = \lambda y$. On pose $z = A|y| - \rho(A)|y|$.

IV.3 Montrer que $z \geq 0$.

IV.4 Le but de cette question est de montrer que $z = 0$.

(a) Montrer que, pour tous $B \in \mathcal{M}_n$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $|B| \leq C$, $\rho(B) \leq \rho(|B|) \leq \rho(C)$.
INDICATION : On pourra commencer par montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|B^p| \leq |B|^p \leq C^p$.

(b) Montrer que, pour une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \geq 0$, telle que la somme des coefficients sur chaque ligne soit égale à une constante α, la valeur α est valeur propre de B et $\rho(B) = \alpha$.

(c) En définissant pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ les sommes $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$, $\alpha = \inf_{i \in \{1,\ldots,n\}} \alpha_i$ et la matrice B telle que $B_{ij} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} A_{ij}$, montrer que

$$\rho(A) \geq \inf_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

(d) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S > 0$. Montrer que, si $S\mathbb{1} \geq \rho(S)\mathbb{1}$, alors nécessairement $S\mathbb{1} = \rho(S)\mathbb{1}$.

(e) Soit $t \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. On suppose que $At \geq \rho(A)t$. En se ramenant à la question précédente, montrer que nécessairement $At = \rho(A)t$.

(f) En conclure que $z = 0$.

IV.5 En déduire que $\rho(A)$ est valeur propre de A avec $|y|$ comme vecteur propre associé, que $|y| > 0$ et qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^{i\theta}|y|$.

IV.6 Démontrer le **théorème de Perron-Frobenius (1ère version)** : *Si A est une matrice strictement positive alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum et l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif.*

IV.7 Décrire $\ker({}^tA - \rho(A)I_n)$.

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. $y \in \mathbb{R}^n$) un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre $\rho(A)$ pour A (resp. pour ${}^tA$).

IV.8 Montrer que nécessairement ${}^ty\,x \neq 0$ et que l'on peut choisir de tels x et y vérifiant ${}^ty\,x = 1$.

On suppose x et y tels que ${}^t y\, x = 1$ et on pose $P = x\, {}^t y$.

IV.9 (a) La matrice P dépend-elle du choix de x et y ?

(b) Montrer que P est une matrice de projection dont on précisera le noyau et l'image.

IV.10 On note $B = A - \rho(A)P$.

(a) Calculer AP, PA et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, B^p.

(b) Montrer que tout vecteur propre de B est aussi vecteur propre de A de valeur propre associée de module inférieur à $\rho(A)$.

(c) Montrer que $\rho(B) < \rho(A)$.

(d) En conclure que $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p = P$.

Rappel : On rappelle qu'une suite de matrices $(C_p)_{p\in\mathbb{N}}$ complexes est dite *convergente* si, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, la suite $([C_p]_{ij})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$, et que cette définition est équivalente à la convergence en norme, quelle que soit la norme sur $\mathcal{M}_n$ choisie.

IV.11 En considérant une trigonalisation de A, montrer le **théorème de Perron-Frobenius (2ème version)** : *Si A est une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n$ alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum et cette valeur propre est simple.*

IV.12 Donner un algorithme de calcul de la valeur propre $\rho(A)$ et du vecteur propre associé x tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $x > 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$. Supposons-la *primitive*, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p > 0$.

IV.13 Montrer alors que $\rho(A)$ est valeur propre simple de A, que c'est la seule de module $\rho(A)$ et que l'espace propre associé est porté par un vecteur propre strictement positif.

V. Opérations sur un graphe

V.1 Donner un exemple de graphe connexe à 4 faces dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $G = (S, A, F)$ un graphe de $\mathbb{R}^d$. Une matrice $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *locale* si ses coefficients sont positifs ou nuls et satisfont $W_{ij} = 0$ **si et seulement si** $(i,j) \notin A$ avec A l'ensemble des arêtes de G. On rappelle que, $\forall i \in S$, $(i,i) \notin A$. On dit que W est une matrice *locale de moyenne* si, de plus, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} W_{ij} = 1$.

V.2 Donner une matrice locale de moyenne W_1 symétrique, c'est-à-dire ${}^tW_1 = W_1$, dans le cas du graphe uniforme périodique en dimension 1 (voir la figure 1). Y a-t-il unicité ? Que dire d'une telle matrice si le graphe n'est pas uniforme ?

V.3 On considère le graphe G, composé de deux faces, donné par la figure 3 ci-après. Montrer que, pour toute matrice locale W, pour tout $p \in \mathbb{N}$, W^p est à coefficients positifs mais pas strictement positifs.

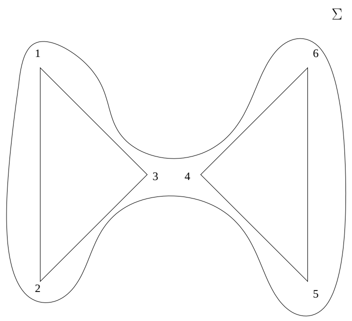

FIG. 3 – Graphe G

On suppose le graphe G connexe pour toute la suite du sujet.

Soit W une matrice locale.

V.4 Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^p > 0$, c'est-à-dire que la matrice W est primitive.
INDICATION : On pourra se fonder sur l'interprétation des puissances de la matrice Π définie à la page 1.

On suppose la matrice W symétrique pour toute la suite de la partie V.

On définit $L = D - W$ où D est la matrice diagonale définie par $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $D_{ii} = \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$.

V.5 Montrer que le noyau de L est engendré par le vecteur $\mathbb{1}$, puis montrer que, pour tout $p \geq 2$, le noyau de L^p est engendré par le vecteur $\mathbb{1}$.
INDICATION : On pourra étudier la matrice $D^{-1}W$.

V.6 Le but de cette question est de donner des bornes pour le spectre de $D^{-1}L$.

(a) Montrer que l'on a (théorème de Gershgörin-Hadamard),

$$\forall C \in \mathcal{M}_n,\ \mathrm{Sp}(C) \subset \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} B\left(C_{ii}, \sum_{j \neq i} C_{ij}\right)$$

où $\mathrm{Sp}(C)$ désigne le spectre de C et $B(a,b)$ le disque de $\mathbb{C}$ de centre a et de rayon b.

(b) Montrer que $D^{-1}L$ est diagonalisable et que

$$\mathrm{Sp}(D^{-1}L) \subset [0, 2]\,.$$

V.7 Montrer que 2 n'est pas valeur propre de $D^{-1}L$.

V.8 On se place pour les deux questions suivantes dans le cas de la dimension 1.

(a) Donner la matrice L_1 associée à la matrice locale de moyenne W_1 trouvée dans la question **V.2** pour un graphe uniforme périodique à n points distincts du segment $[0, 1]$ (voir la figure 1).

(b) Calculer les valeurs propres de la matrice L_1.

VI. Techniques de régularisation

Soient $f \in \mathbb{R}^n$ et W une matrice locale symétrique. Soit $\tau > 0$. On s'intéresse en premier lieu au système différentiel d'inconnue $F : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto F(t)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = -D^{-1}LF, \\ \\ F(0) = f \end{cases}$$

avec L et D les matrices définies en fonction de W comme dans la partie **V.** On rappelle que le schéma d'Euler explicite de pas $\Delta t = \tau/N$ pour ce système différentiel est défini par

$$\begin{cases} u_0 = f, \\ \\ \dfrac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = -D^{-1}Lu_k, \ k \in \{0, \dots, N-1\} \end{cases}$$

et que le schéma d'Euler implicite de pas $\Delta t = \tau/N$ est défini par

$$\begin{cases} v_0 = f, \\ \\ \dfrac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} = -D^{-1}Lv_{k+1}, \ k \in \{0, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

VI.1 Donner l'expression exacte de $F(\tau)$ en termes des éléments propres de $D^{-1}L$ et montrer que

$$\lim_{\tau \to +\infty} F(\tau) = \frac{1}{\mathrm{tr}(D)} \left(\sum_{i=1}^{n} D_{ii} f_i \right) \mathbb{1},$$

où $\mathrm{tr}(D)$ est la trace de la matrice D.

Indication : On pourra étudier les éléments propres de la matrice $D^{-1/2}LD^{-1/2}$, où $D^{-1/2}$ est la matrice diagonale de coefficients $[D^{-1/2}]_{ii} = \dfrac{1}{\sqrt{D_{ii}}}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

VI.2 Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

(a) Écrire le schéma d'Euler explicite pour le système différentiel avec un pas de temps uniforme $\Delta t = \tau/N$ sous la forme

$$\begin{cases} u_0 = f, \\ u_{k+1} = M_e u_k, \; k \in \{0, \dots, N-1\}, \end{cases}$$

M_e étant une matrice à préciser.

(b) Montrer que, si $\Delta t \in]0,1]$, $\|M_e\|_\infty = 1 = \rho(M_e)$. Que vaut $\|M_e\|_\infty$ si $\Delta t > 1$?

(c) Donner une condition suffisante sur Δt qui assure la convergence du schéma en norme infinie, c'est-à-dire que

$$\lim_{N \to +\infty} \sup_{k \in \{0,\dots,N-1\}} \|F(k\Delta t) - u_k\|_\infty = 0.$$

Indication : On pourra commencer par montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall k \in \{0, \dots, N\}$, $|e^{-k\Delta t} - (1-\Delta t)^k| \leq C\Delta t^2 + |1 - \Delta t||e^{-(k-1)\Delta t} - (1-\Delta t)^{k-1}|$.

VI.3 Montrer que cette condition est nécessaire, en étudiant par exemple le comportement à l'infini de la suite réelle $(\|M_e^k f\|_\infty)_{k \in \mathbb{N}}$.

VI.4 En quoi le schéma d'Euler implicite, que l'on notera sous la forme

$$\begin{cases} v_0 = f \\ v_{k+1} = M_i v_k, \; k \in \{0, \dots, N-1\}, \end{cases}$$

avec M_i une matrice à préciser, permet-il de s'affranchir de la condition trouvée précédemment et quelle est la contrepartie, notamment du point de vue pratique ?

VI.5 Montrer que, sous la condition $\Delta t \in]0,1]$, la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ définie précédemment satisfait

$$\lim_{k \to +\infty} u_k = \frac{1}{\operatorname{tr}(D)} \left(\sum_{i=1}^{n} D_{ii} f_i \right) \mathbb{1}.$$

VI.6 Pour $\Delta t > 0$, quelle est la limite de $(v_k)_{k \geq 0}$?

VI.7 En pratique, quelle est la vitesse de convergence de ces suites ?

VI.8 Justifier l'appellation de « technique de régularisation par l'équation de la chaleur ».

Fin de l'épreuve