Rapport sur l'épreuve de probabilités du concours d'entrée en 3^e année à l'ENS de Cachan, année 2009.

A : Sur le sujet. Le thème de l'épreuve était le problème suivant. On fixe des variables aléatoires $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ *iid* telles que $P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_1 = -1) = 1/2$, puis on construit pour tout $0 < \alpha < 1$ une variable aléatoire $V^\alpha = \sum_{n\geq 1} \alpha^n \varepsilon_n$. Il s'agit de déterminer pour quels α la variable aléatoire V^α admet une densité.

La question semble anodine, mais c'est un leurre. Si $0 < \alpha < 1/2$, la loi de V^α est singulière, car la série converge trop vite (cf III). Le cas $\alpha = 1/2$ correspond à la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Si $1/2 < \alpha < 1$, la loi de V^α est de support plein (cf III), mais il s'avère que si α est l'inverse d'un nombre de Pisot (dont le nombre d'or est un cas particulier, cf III) alors cette loi est singulière. C'est un résultat d'Erdös. On ne connaît à ce jour pas d'autre α pour lequel la loi de V^α est singulière. Dans l'autre direction, Solomyak a montré que pour presque tout $\alpha \in (1/2, 1)$, V^α admet une densité dans L^2. La preuve initiale est difficile et le sujet (IV et V) présente une partie d'une preuve plus simple due à Peres et Solomyak. Le problème pour $\alpha \in (1/2, 1)$ n'est pas complètement résolu, malgré d'autres contributions remarquables d'Erdös, Kahane, Salem, Peres, etc. Les questions sont rapidement très fines. Par exemple, un résultat de Salem stipule que la transformée de Fourier de la loi de V^α tend vers 0 à l'infini si et seulement si α est l'inverse d'un nombre de Pisot. Les mesures ayant cette propriété s'appellent des mesures de Rajchman, mais cette classe de mesures contient strictement celle des mesures à densité...

De façon surprenante, ce problème présente des connexions avec beaucoup de domaines des mathématiques : Analyse harmonique, théorie des nombres algébriques, systèmes dynamiques, estimation de dimensions de Hausdorff... On pourra consulter le très bon article historique "Sixty years of Bernoulli convolutions" écrit par Peres, Schlag et Solomyak (disponible sur la page Web de Peres) et qui a servi de point de départ à l'élaboration de ce problème.

B : Sur les copies. Dans la mesure du possible, il est souhaitable de ne rédiger la réponse à une question que si on l'estime vraiment juste. Le grapillage n'est pas payant (concours d'Ecole Normale) ; la meilleure copie a fait l'impasse sur la partie III, mais a traité parfaitement la partie IV.

– Partie I. 1) Il fallait vérifier *proprement* que l'on avait une chaîne de Markov. Question 3)a) Première difficulté, car les (A_n) ne sont pas indépendants. Bien traitée dans un quart des copies.
– Partie II. Plutôt réussie. C'est là que la majorité des points ont été obtenus.
– Partie III. 1) Deuxième partie mal faite (autosimilarité du support). Question 4)b) très décevante, alors qu'il suffisait de définir un procédé itératif à l'aide de la question précédente. 5c) La contradiction portait sur le lemme de Riemann-Lebesgue. Une seule copie l'a mentionné.
– Partie IV. Partie plus ou moins classique sur la théorie de la mesure. Beaucoup de bêtises autour de la question 1 sur les tribus.
– Partie V. Quasiment pas abordée.