Solution du sujet de Probabilités, Cachan 3A 2009

Avertissement: Je tiens à préciser que je ne suis pas lié à l'École Normale Supérieure de Cachan; par suite les affirmations vraies ou fausses contenues dans ces pages ne sauraient engager l'École.

À la fin du problème, vous pouvez rester un peu sur votre faim car la condition de transversalité n'est pas démontrée. Dans ce cas, je suggère la lecture de l'article de Peres et Solomyak : " Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof", paru à *Mathematical Research Letter*, Vol. 3, 231–239 (1996), dont l'auteur du problème s'est vraisemblablement inspiré.

Olivier Garet, le 6 mai 2009
Version révisée le 24 août 2009

Partie I

1. $U_{n+1}^{\alpha} = F(U_n^{\alpha}, \epsilon_{n+1})$, avec $F(x,y) = \alpha x + y$. Comme $(\epsilon_n)_{n\ge 1}$ est une suite de variables iid indépendante de $U_0^{\alpha} = 0$, on a bien une chaîne de Markov. La loi initiale est δ_0 et l'opérateur de transition: $f \mapsto Tf$ avec $Tf(x) = \mathbb{E}[f(F(x,\epsilon_1)] = \frac{1}{2}(f(\alpha x+1) + f(\alpha x - 1))$.

2. $U_n^1 = \sum_{k=1}^n \epsilon_k$. Les (ϵ_k) sont indépendants, identiquement distribués, avec un moment d'ordre 1, donc U_n^1/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[\epsilon^1] = 1/2.1 + 1/2.(-1) = 0$: c'est la loi forte des grands nombres. Les (ϵ_k) sont indépendants, identiquement distribués, avec un moment d'ordre 1, donc $(U_n^1 - \mathbb{E}[U_n^1])/\sqrt{n}$ converge en loi vers la loi gaussienne centrée de variance la variance de ϵ_1, soit $\mathbb{E}[\epsilon_1^2] - (\mathbb{E}[\epsilon_1])^2) = \mathbb{E}[1] - 0 = 1$: c'est le théorème central limite. Ici, comme les ϵ_k sont centrés, $\mathbb{E}[U_n^1] = 0$ et on a simplement $U_n^1/\sqrt{n}$ qui converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

3. Posons $E_n = \{\epsilon_{nk_0+1} = \dots \epsilon_{(n+1)k_0} = 1\}$ et $F_n = \{\epsilon_{nk_0+1} = \dots \epsilon_{(n+1)k_0} = -1\}$. Par inclusion, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{0\le m\le n+1} A_m^c) = \mathbb{P}(\bigcap_{0\le m\le n} A_m^c) - \mathbb{P}((\bigcap_{0\le m\le n} A_m^c) \cap A_{n+1}).$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}((\bigcap_{0\le m\le n} A_m^c) \cap A_{n+1}) \ge 2^{-k_0}\mathbb{P}(\bigcap_{0\le m\le n} A_m^c)$$

Comme $(\bigcap_{0\le m\le n} A_m^c)$ est $\mathcal{F}_{(n+1)k_0}$-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}[A_{n+1}|\mathcal{F}_{(n+1)k_0}] \ge 2^{-k_0} \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

$$1\!\!1_{A_n} = 1\!\!1_{E_n} 1\!\!1_{\{U_{nk_0}^{\alpha}>0\}} + 1\!\!1_{F_n} 1\!\!1_{\{U_{nk_0}^{\alpha}<0\}} + 1\!\!1_{E_n\cup F_n} 1\!\!1_{\{U_{nk_0}^{\alpha}=0\}}.$$

Comme U_{nk_0} est $\mathcal{F}_{nk_0}$-mesurable, cela entraîne

$$\mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{nk_0}) = \mathbb{P}(E_n|\mathcal{F}_{nk_0})1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}>0\}} + \mathbb{P}(F_n|\mathcal{F}_{nk_0})1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}<0\}} + \mathbb{P}(E_n \cup F_n|\mathcal{F}_{nk_0})1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}=0\}},$$

puis par indépendance

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{nk_0}) &= \mathbb{P}(E_n)1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}>0\}} + \mathbb{P}(F_n)1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}<0\}} + \mathbb{P}(E_n \cup F_n)1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}=0\}} \\
&= 2^{-k_0}1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}>0\}} + 2^{-k_0}1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}<0\}} + 2.2^{-k_0}1\!\!1_{\{U^\alpha_{nk_0}=0\}} \\
&\geq 2^{-k_0}.
\end{aligned}$$

4. Par une récurrence évidente

$$\mathbb{P}(\underset{0\leq m\leq n}{\cap} A^c_m) \leq (1-2^{-k_0})^n,$$

d'où d'après le théorème de convergence séquentielle décroissante $\mathbb{P}(\underset{m\geq}{\cap} A^c_m) = 0$, soit $\mathbb{P}(\underset{m\geq}{\cup} A_m) = 1$. Ainsi, presque sûrement, il existe n tel que A_n est vérifié. Mais si A_n est vérifié, on a

$$\epsilon_{nk_0+1}U^\alpha_{n+k_0} = \alpha^{k_0}\epsilon_{nk_0+1}U^\alpha_n + \sum_{i=0}^{k_0-1}\alpha^i \geq \frac{\alpha^{k_0}-1}{\alpha-1} > \frac{1}{\alpha-1},$$

d'où $|U^\alpha_{n+k_0}| > \frac{1}{\alpha-1}$, ce qui montre le résultat voulu.

5. On a $|U^\alpha_{n+1}| \geq \alpha|U^\alpha_n| - 1$, d'où

$$|U^\alpha_{n+1}| - \frac{1}{\alpha-1} \geq \alpha(|U^\alpha_n| - \frac{1}{\alpha-1}),$$

puis

$$|U^\alpha_{n_0+i}| \geq \frac{1}{\alpha-1} + \alpha^i(|U^\alpha_{n_0} - \frac{1}{\alpha-1}).$$

ce qui entraîne que $|U^\alpha_{n_0+i}|$ tend vers l'infini dès qu'on a trouvé un n_0 tel que $|U^\alpha_n| - \frac{1}{\alpha-1} > 0$, ce qui est assuré par la question précédente.

Partie II

1. Comme $|\alpha^{k-1}\epsilon_k| = \alpha^{k-1}$, pour tout ω, la série de terme général $\alpha^{k-1}\epsilon_k(\omega)$ converge uniformément vers V^α. Or la convergence presque sûre entraîne la converge en loi, on obtient que V^α_n converge en loi vers V^α. Cependant, comme

$$U^\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha^{k-1}\epsilon_{n+1-k},$$

U_n^α et V_n^α ont même loi: la loi image de $(\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}\delta_{-1})^{\otimes n}$ par $(x_1,\dots,x_n)\mapsto \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1}x_k$, U_n^α converge également en loi vers V^α.
Soit k_0 tel que $\alpha^{k_0}<1/3$. On a

$$\begin{aligned} |U_n^\alpha - \sum_{k=1}^{k_0}\alpha^{k-1}\epsilon_{n+1-k}| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\alpha^{k-1} \\ &\leq \frac{\alpha^{k_0}}{1-\alpha} < -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

On en déduit que $E_n \subset \{U_{(n+1)k_0}^\alpha \geq \frac{1}{3}\frac{1}{1-\alpha}\}$ et $F_n\subset\{U_{(n+1)k_0}^\alpha \leq -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\alpha}\}$.
Les E_n sont indépendants, avec $\mathbb{P}(E_n)=2^{-k_0}$, donc (par exemple avec le 2e lemme de Borel-Cantelli), $\mathbb{P}(\limsup E_n)=1$, ce qui entraîne que

$$\limsup U_n^\alpha \geq \frac{1}{3}\frac{1}{1-\alpha} \quad \mathbb{P}\text{ p.s.}$$

De la même manière

$$\liminf U_n^\alpha \leq -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\alpha} \quad \mathbb{P}\text{ p.s.}$$

Ainsi, U_n^α diverge presque sûrement.

2. (a)

$$V^\alpha = \epsilon_1 + \sum_{k\geq 2}\alpha^{k-1}\epsilon_k = \epsilon_1 + \alpha\sum_{k\geq 1}\alpha^{k-1}\epsilon_{k+1}.$$

On a l'égalité voulue avec $V^{\alpha,1}=\sum_{k\geq 1}\alpha^{k-1}\epsilon_{k+1}$. Remarquons que, par construction, $V^{\alpha,1}$ est indépendante de ϵ_1. $V^{\alpha,1}$ et V^α ont la même loi: dans les deux cas, la loi est obtenue comme loi image de $(\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}\delta_{-1})^{\otimes\mathbb{N}^*}$ par $(x_n)_{n\geq 1}\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha^{k-1}x_k$.

$$\begin{aligned} F_\alpha(t) &= \mathbb{P}(V^\alpha \leq t) \\ &= \mathbb{P}(V^\alpha\leq t,\epsilon_1=1)+\mathbb{P}(V^\alpha\leq t,\epsilon_1=-1) \\ &= \mathbb{P}(1+\alpha V^{1,\alpha}\leq t,\epsilon_1=1)+\mathbb{P}(-1+\alpha V^{1,\alpha}\leq t,\epsilon_1=-1) \\ &= \mathbb{P}(1+\alpha V^{1,\alpha}\leq t)\mathbb{P}(\epsilon_1=1)+\mathbb{P}(-1+\alpha V^{1,\alpha}\leq t)\mathbb{P}(\epsilon_1=-1) \\ &= F_\alpha((t-1)/\alpha)/2+F_\alpha((t+1)/\alpha)/2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(]-\infty,t]) &= F_\alpha(t) \\ &= \frac{1}{2}F_\alpha(\frac{t+1}{\alpha})+\frac{1}{2}F_\alpha(\frac{t-1}{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{]-\infty,\frac{t+1}{\alpha}]} f_\alpha(u)\ d\lambda(u)+\frac{1}{2}\int_{]-\infty,\frac{t-1}{\alpha}]} f_\alpha(u)\ d\lambda(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_{]-\infty,t]}\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y+1}{\alpha})\ d\lambda(y)+\frac{1}{2}\int_{]-\infty,t]}\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y-1}{\alpha})\ d\lambda(y) \\ &= \int_{]-\infty,t]}\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y+1}{\alpha})+\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y-1}{\alpha}))\ d\lambda(y) \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y+1}{\alpha})+\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y-1}{\alpha}))$ est une densité pour ν_α, d'où $f_\alpha(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y+1}{\alpha}) + \frac{1}{\alpha}f_\alpha(\frac{y-1}{\alpha}))$ pour presque tout t.

(c) i. Soit t_0 un point où F_α est discontinue. Comme F_α est croissante et continue à droite, on a $F_\alpha(t_0) - F_\alpha(t_0^-) > 0$. Ainsi, pour $n > (F_\alpha(t_0) - F_\alpha(t_0^-))^{-1}$, $t_0 \in D_n$ qui est donc non-vide. Montrons que D_n est fini, de cardinal majoré par n. Si ce n'était pas le cas, il existerait $x_0, \dots, x_n$, avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Comme F_α est croissante, on a $F(x_0^-) \leq F(x_0) \leq F(x_1^-) \leq F(x_1) \leq \dots \leq F(x_n^-) \leq F(x_n)$, d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) - F(x_i^-) \leq F(x_n) - F(x_0^-) \leq 1.$$

Cependant par définition de D_n , $F(x_i) - F(x_i^-) \geq 1/n$ pour tout i: on obtient donc $(n+1) \times \frac{1}{n} \leq 1$: contradiction.

ii. Posons $d(x) = F_\alpha(x) - F_\alpha(x^-)$. Pour $x \notin D_n$, on a $d(x) \leq 1/n < d(t_0)$. Et pour $x \in D_n$, par définition de t_0, on a $d(x) \leq d(t_0)$. Finalement $d(x) \leq d(t_0)$ pour tout réel x.

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t_0^-) &= \lim_{t\to t_0; t<t_0} F_\alpha(t) \\
&= \lim_{t\to t_0; t<t_0} \frac{1}{2}(F_\alpha(\frac{t+1}{\alpha}) + F_\alpha(\frac{t-1}{\alpha})) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to t_0; t<t_0}(F_\alpha(\frac{t+1}{\alpha}) + \frac{1}{2}\lim_{t\to t_0; t<t_0}(F_\alpha(\frac{t+1}{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}(F_\alpha((\frac{t+1}{\alpha})^-) + F_\alpha((\frac{t-1}{\alpha})^-))
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit avec (1), que $d(t) = \frac{1}{2}(d(\frac{t+1}{\alpha}) + d(\frac{t-1}{\alpha}))$. En particulier $d(t_0) = \frac{1}{2}(d(\frac{t_0+1}{\alpha}) + d(\frac{t_0-1}{\alpha}))$. Cependant $d(\frac{t_0-1}{\alpha})) \leq d(t_0)$ d'après la propriété énoncée plus haut. On en déduit que $d(\frac{t_0+1}{\alpha}) \geq d(t_0)$, d'où $d(\frac{t_0+1}{\alpha}) = d(t_0) > 1/n$ ce qui signifie que $\frac{t_0+1}{\alpha}$ est dans D_n et que son image par d et s, ce qui contredit la maximalité de t_0, puisque $\frac{t_0+1}{\alpha} > t_0 + 1 > t_0$.

(d) i. Pour $n = 0$, c'est vrai. Montrons-le par récurrence. Supposons que Y_n suit la loi ν, c'est à dire que Y_n a comme fonction de répartition F_ν.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{n+1} \leq t) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq t, \epsilon_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq t, \epsilon_{n+1} = 1) \\
&= \mathbb{P}(Y_n \leq \frac{t-1}{\alpha}, \epsilon_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(Y_n \leq \frac{t+1}{\alpha}, \epsilon_{n+1} = 1) \\
&= \mathbb{P}(Y_n \leq \frac{t-1}{\alpha}\mathbb{P}(\epsilon_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(Y_n \leq \frac{t+1}{\alpha}\mathbb{P}(\epsilon_{n+1} = 1) \\
&= \frac{1}{2}F_\nu(\frac{t-1}{\alpha}) + \frac{1}{2}F_\nu(\frac{t+1}{\alpha}) \\
&= F_\nu(t)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que Y_{n+1} a comme fonction de répartition F_ν, c'est à dire que Y_{n+1} suit la loi ν.

ii. On va montrer que deux lois de probabilités qui satisfont (1) sont égales. Cela donnera le résultat du le 2 a). Soit ν, μ deux telles lois. On prend Y_0 de loi ν, Z_0 de loi μ, $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ suite iid suivant $\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}\delta_{-1}$ et on définit comme précédemment $Y_{n+1} = \alpha Y_n+\epsilon_{n+1}$ et $Z_{n+1} = \alpha Z_n + \epsilon_{n+1}$. Comme précédemment, pour tout n Y_n suit ν et Z_n suit μ. On a $Y_{n+1} - Z_{n+1} = \alpha(Y_n - Z_n)$, donc $Z_n - Y_n = (Z_0 - Y_0)\alpha^n$, ce qui signifie que $Y_n - Z_n$ tend presque sûrement vers 0 Soit $\epsilon > 0$ quelconque

$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) \leq \mathbb{P}(Z_n \leq t + \epsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Z_n| > \epsilon),$$

soit

$$\nu(] - \infty, t]) \leq \mu(] - \infty, t + \epsilon]) + \mathbb{P}(|Y_n - Z_n| > \epsilon)$$

Mais $Y_n - Z_n$ tend presque sûrement vers 0, donc $Y_n - Z_n$ tend en probabilité vers 0, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\nu(] - \infty, t]) \leq \mu(] - \infty, t + \epsilon]).$$

Une fonction de répartition est continue à droite, donc en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient

$$\nu(] - \infty, t]) \leq \mu(] - \infty, t]).$$

Comme les rôles de ν et μ sont symétriques, on a également l'inégalité inverse: ainsi $F_\nu = F_\mu$ et les deux lois sont égales.

Partie III

1. $|V_\alpha| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{k-1}|\epsilon_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{k-1} = \frac{1}{1-\alpha}$. Ainsi $\nu_\alpha(I_\alpha) = \mathbb{P}(V_\alpha \in I_\alpha) = 1$, ce qui entraîne que $S_\alpha \subset I_\alpha$ puisque S_α est le plus petit fermé de masse 1 pour ν_α.

   On a

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}(V_\alpha \in S_\alpha) \\
&= \mathbb{P}(V_\alpha \in S_\alpha, \epsilon_1 = 1) + \mathbb{P}(V_\alpha \in S_\alpha, \epsilon_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(T_{\alpha,+}(V_{\alpha,1}) \in S_\alpha, \epsilon_1 = 1) + \mathbb{P}(T_{\alpha,+}(V_{\alpha,1}) \in S_\alpha, \epsilon_1 = -1) \\
&= \frac{1}{2}(\nu_\alpha((T_{\alpha,+})^{-1}(S_\alpha)) + \nu_\alpha((T_{\alpha,+})^{-1}(S_\alpha))),
\end{aligned}$$

   vu l'indépendance et la loi de $V^{\alpha,1}$. Mais pour que deux probabilités ayant pour moyenne 1, il faut qu'elles soient toutes deux égales à 1:

$$\nu_\alpha((T_{\alpha,+})^{-1}(S_\alpha)) = \nu_\alpha((T_{\alpha,+})^{-1}(S_\alpha)) = 1,$$

ce qui entraîne que $(T_{\alpha,+})^{-1}(S_\alpha) \supset S_\alpha$ et $(T_{\alpha,-})^{-1}(S_\alpha) \supset S_\alpha$, soit $T_{\alpha,+}(S_\alpha) \subset S_\alpha$ et $T_{\alpha,-}(S_\alpha) \subset S_\alpha$. D'où

$$T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha) \subset S_\alpha.$$

D'autre part $\mathbb{P}(V_{\alpha,1} \in S_\alpha, \epsilon_1 \in \{-1,+1\}) = 1$.

Mais $V_{\alpha,1} \in S_\alpha, \epsilon_1 \in \{-1,+1\}$ entraîne $V^\alpha \in T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha)$ d'après la relation $V^\alpha = \alpha V^{\alpha,1} + \epsilon_1$. On en déduit que $\mathbb{P}(V^\alpha \in T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha) = 1$, soit $\nu_\alpha(T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha) = 1$. Comme $T_{\alpha,+}$ sont des homéomorphismes et S_α un fermé, $\nu_\alpha(T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha)$ est un fermé, donc $S_\alpha \subset T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha)$.

2. (a) Le vecteur $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ prend $|\{-1,+1\}^n| = 2^n$ valeurs, donc son image par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1}\alpha^{k-1}\epsilon_k$ prend au plus 2^n valeurs, il en est donc de même pour V_n^α.

$$|V^\alpha - V_n^\alpha| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha^{k-1}\epsilon_k| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha^{k-1}|\epsilon_k| = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

   (b) Soient $x_1, \dots, x_{2^n}$ les valeurs prises par V_n^α (répétées si besoin). D'après ce qui précède $V^\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{2^n} [x_i - \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, x_i + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}]$, ainsi

$$\mathbb{P}(V^\alpha \in \bigcup_{i=1}^{2^n} [x_i - \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, x_i + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}]) = 1,$$

soit

$$S_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{2^n} [x_i - \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, x_i + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}],$$

d'où

$$\lambda(S_\alpha) \le \sum_{i=1}^{2^n} \lambda([x_i - \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, x_i + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}]) = 2^n \times \frac{2\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha}(2\alpha)^n,$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient donc $\lambda(S_\alpha) = 0$.

3. On a

$$\exp(itV_n^\alpha) = \prod_{k=1}^n \exp(it\alpha^{k-1}\epsilon_n),$$

d'où par indépendance

$$\mathbb{E}[\exp(itV_n^\alpha)] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\exp(it\alpha^{k-1}\epsilon_n)].$$

Comme $\mathbb{E}[\exp(it\alpha^{k-1}\epsilon_n)] = \exp(it\alpha^{k-1}.1)\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) + \exp(it\alpha^{k-1}.-1)\mathbb{P}(\epsilon_1 = -1) = \cos(it\alpha^{k-1})$, on a

$$\exp(itV_n^\alpha) = \prod_{k=1}^n \cos(it\alpha^{k-1}).$$

V_n^α converge presque sûrement vers V^α, donc V_n^α converge en loi vers V^α, donc la fonction caractéristique de V_n^α converge vers la fonction caractéristique de V^α, soit

$$\mathbb{E}[\exp(itV^\alpha)] = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(it\alpha^{k-1}\epsilon_n)].$$

La fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-2,2]$ est

$$t \mapsto \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{itx}\ du = \frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2it} = \frac{\sin 2t}{2t},$$

prolongée par continuité en $t=0$. Bien sûr, dire que les deux fonctions coïncident, c'est dire que $\nu_{1/2}$ est égale à la loi uniforme sur $[-2,2]$. Notons F la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[-2,2]$. En vertu de II.3.b, il suffit de montrer que F satisfait à la relation (1). Or

$$1\!\!1_{[-2,2[}(x) = 1\!\!1_{[-2,0[}(x) + 1\!\!1_{[0,2[}(x) = 1\!\!1_{[-2,2[}(2(x+1)) + 1\!\!1_{[-2,2[}(2(x-1)).$$

En intégrant l'identité de $-\infty$ à x et en faisant un changement de variable comme en II.2.b, ont obtient

$$F(t) = \frac{1}{2}F(2(t+1)) + \frac{1}{2}F(2(t-1)),$$

ce qui est le résultat attendu.

4. (a) On a $-\frac{1}{1-\alpha} \le \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \le \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} \le \frac{1}{1-\alpha}$. Cela entraîne que $I_\alpha = I_{\alpha,+} \cup I_{\alpha,-}$. Comme $T_{\alpha,+}$ et $T_{\alpha,-}$ sont affines croissantes, les vérifications $T_{\alpha,+}(I_\alpha) = I_{\alpha,+}$ et $T_{\alpha,-}(I_\alpha) = I_{\alpha,-}$ sont immédiates.

   (b) Posons $A_0 = \{0\}$, puis $A_{n+1} = T_{\alpha,+}(A_n) \cup T_{\alpha,-}(A_n)$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \ge 0$, pour tout $x \in I_\alpha$, il existe $y \in A_n$ avec $|y-x| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$. Pour $n=0$, c'est clair d'après la définition de I_α. Ensuite, soit $x \in I_\alpha$. D'après la question précédente I_α est l'image par T_{α_+} d'un élément de I_α ou l'image par T_{α_-} d'un élément de I_α. Supposons par exemple $x = T_{\alpha,+}(x')$, avec $x' \in I_\alpha$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $y' \in A_n$, avec $|x'-y'| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$. Posons $y = T_{\alpha,+}(y')$: $y \in A_{n+1}$. Comme $T_{\alpha,+}$ est affine de rapport α, on a

$$|x-y| = T_{\alpha,+}(y') - T_{\alpha,+}(y')| = \alpha|x'-y'| \le \alpha\frac{\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

   Le cas où x s'écrit $x = T_{\alpha,-}(x')$ se traite de la même manière, ce qui permet de conclure par récurrence. Enfin, il est facile de voir que tout élément de A_n s'écrit sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\xi_k \in H_\alpha$. On en déduit que $d(x,H_\alpha) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$, d'où $d(x,H_\alpha)=0$ en faisant tendre n vers l'infini, soit $x \in \overline{H_\alpha}$, quelque soit $x \in I_\alpha$: ainsi H_α est dense dans I_α.

(c) Soient a, b dans I_α avec $a < b$. Posons $m = (a+b)/2$. Soit n tel que $\alpha^n/(1-\alpha) < (b-a)/4$ Il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n$ avec $|m - \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1}\xi_k| \leq \alpha^n/(1-\alpha) < (b-a)/4$. Posons $q = \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1}\xi_k$. On a $\{V_n^\alpha = q\} \subset \{V_\alpha \subset (a,b)\}$. En effet, si $V_n^\alpha = q$, on a

$$|V_\alpha - m| \leq |V_\alpha - V_\alpha^n| + |q - m| \leq \frac{2\alpha^n}{1-\alpha} < \frac{b-a}{2}.$$

Ainsi

$$F_\alpha(b) - F_\alpha(a) = \nu_\alpha((a,b]) \geq \nu_\alpha((a,b)) = \mathbb{P}(V_\alpha \in (a,b)) \geq \mathbb{P}(V_\alpha^n = q) \geq 2^{-n} > 0.$$

On vient de montrer que tout intervalle ouvert inclus dans I_α est charge par ν_α. Le complémentaire de S_α est le plus grand ouvert O de mesure nulle. Supposons que O contienne un point de I_α: alors O contiendrait un intervalle ouvert inclus dans I_α: cet ensemble serait de mesure nulle, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Ainsi $S_\alpha \supset I_\alpha$. D'autre part, on sait déjà que $S_\alpha \subset I_\alpha$, ce qui montre que $S_\alpha = I_\alpha$.

5. (a) $u^2 = u+1$ d'où $u^{n+2} = u^{n+1} + u^n$ et $v^2 = v+1$ d'où $v^{n+2} = v^{n+1} + v^n$. Ainsi si on pose $w_n = u^n + v^n$, on a la récurrence $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$. $w_0 = u^0 + v^0 = 2$, $w_1 = u^1 + v^1 = u + v = 1$. Donc, par récurrence $w_n \in \mathbb{N}$. Ainsi $|d(u^n, \mathbb{Z})| \leq |w_n - u^n| = |v^n| = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n$, ce qui montre le premier résultat. Si $u^n - 1/2 \in \mathbb{Z}$, alors $u^n - 1/2 - w_n = -1/2 - v^n \in \mathbb{Z}$. Si $|v^n| < 1/2$, il est clair que $-1/2 - v^n \notin \mathbb{Z}$. Comme $|v| < 1$, pour $n \geq 2$, on a $|v^n| \leq |v^2| = |1+v| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$. Reste à tester $n = 0$ et $n = 1$: $-1/2 - v^0 = -3/2 \notin \mathbb{Z}$ et $-1 - v = -2 + u \notin \mathbb{Z}$.

(b) Dans ce cas χ_f est la fonction caractéristique de ν_α. D'après III.3,on a donc

$$\chi_f(t) = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(t\alpha^{k-1}),$$

et

$$\begin{aligned}
\chi_f(t_n) &= \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi u^n \alpha^{k-1}) \\
&= \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi \alpha^{-n+k-1}) \\
&= \prod_{k=-n}^{+\infty} \cos(\pi \alpha^k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \cos(\pi \alpha^{-k}) \cos(\pi) \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi \alpha^k) \\
&= -\prod_{k=1}^{n} \cos(\pi u^k) \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi \alpha^k)
\end{aligned}$$

D'où
$$\lim_{n\to+\infty} |\chi_f(t_n)| = |\prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi u^k) \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi \alpha^k)|.$$

6. On peut réécrire la limite comme
$$\sqrt{\prod_{k=1}^{+\infty} \cos^2(\pi u^k) \prod_{k=1}^{+\infty} \cos^2(\pi \alpha^k)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\sin^2(\pi u^k)) \prod_{k=1}^{+\infty}(1-\sin^2(\pi \alpha^k))}$$
Comsidérons d'abord $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\sin^2(\pi u^k))$. $1-\sin^2(\pi^k)$ n'est nul que si πu^k est congru à $\pi/2$ modulo π, soit u^k congru à $1/2$ modulo 1, ce qui n'arrive jamais d'après le (a). Ainsi, que le produit est non nul, il suffit de passer au logarithme et de montrer que la somme de la série de terme général $\log(1-\sin^2(\pi u^k))$ converge. Cependant, comme $u^n + v^n \in \mathbb{Z}$, $\sin^2(\pi u^k) = \sin^2(\pi(u^k - (u+v^k))) = \sin^2(\pi v^k)$ qui tend vers 0 car v^k tend vers 0. Alors,
$$\log(1-\sin^2(\pi u^k)) = \log(1-\sin^2(\pi v^k)) \sim -\sin^2(\pi v^k) \sim -(\pi v^k)^2 = pi^2 v^{2k},$$
ce qui montre que la série converge absolument. Comme le produit des racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ fait -1, on a $v = -1/u$, soit $v = -\alpha$. Ainsi
$$\prod_{k=1}^{+\infty} \cos^2(\pi \alpha^k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos^2(\pi v^k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos^2(\pi u^k)$$
et on vient de montrer que ce produit est non nul. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} |\chi_f(t_n)| > 0$. Comme t_n tend vers l'infini et que χ_f est la transformée de Fourier de $f \in L^1$, on obtient une contradiction avec le lemme de Riemann-Lebesgue, qui dit que la transformée de Fourier d'une fonction L^1 tend vers 0 en l'infini.

7. (a) Soit t fixé. Posons $\phi_t(x,y) = \mathbb{1}_{x+y\le t}$. On note f_X la densité de X.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y\le t) &= \mathbb{E}[\phi_t(X,Y)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_t(x,y)\ d\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_t(x,y)\ d(\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y)(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y\le t\}}\ d\mathbb{P}_X(x)\ d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y\le t\}}\ f_X(x)\ d\lambda(x)\ d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x'\le t\}}\ f_X(x'-y)\ d\lambda(x')\ d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x'\le t\}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x'-y) d\mathbb{P}_Y(y) \right)\ d\lambda(x')
\end{aligned}$$

Pour les deux dernières lignes, on a utilisé un changement de variables affine puis le théorème de Tonelli. Ainsi $x' \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(x'-y)d\mathbb{P}_Y(y)$ est une densité de $X+Y$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(b)

$$V^\alpha = \sum_{k\geq 1} \alpha^{k-1}\epsilon_k = \sum_{k\geq 1} \alpha^{2k-1}\epsilon_{2k} + \sum_{k\geq 1} \alpha^{2k-2}\epsilon_{2k-1} = Y_\alpha + Z_{\alpha^2},$$

avec $Z_{2\alpha} = \sum_{k\geq 1} (\alpha^2)^{k-1}\epsilon_{2k-1}$. Il est facile de voir que Y_α et Z_{α^2} sont indépendantes et que Z_{α^2} suit la loi ν_{α^2}. Ainsi, d'après la question précédente, si ν_{α^2} est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_α aussi.

(c) On va commencer par généraliser de résultat précédent: pour tout entier p, si ν_{α^p} est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_α aussi.

$$V^\alpha = \sum_{k\geq 0} \alpha^k \epsilon_{k+1} = \sum_{k\geq 0} \alpha^{kp}\epsilon_{kp+1} + \sum_{k\geq 0, k/p \notin \mathbb{N}} \alpha^k \epsilon_{k+1}$$

Ainsi le premier terme suit la loi ν_{α^p} et est indépendant du second, ce qui donne la conclusion suivant la même méthode qu'à la question précédente.

Appliquons le résultat à $\alpha = 2^{-1/p}$: $\alpha^p = 1/2$. On a vu en III.3 que $\nu_{1/2}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $\frac{1}{4}1\!\!1_{[-2,2]}$, donc ν_α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Partie IV

1. (a) Soit $A \in C$. Montrons que $A^c \in C$. Soit $\eta > 0$. Par définition de C il existe O ouvert, F fermé, avec $F \subset A \subset O$ et $m(O \backslash F) < \eta$. On a $O^c \subset A^c \subset F^c$. O^c est fermé et F^c est ouvert $m(F^c \backslash O^c) = m(F^c \cap O) = m(O \backslash F) < \eta$. Comme on trouve un tel couple quel que soit $\eta > 0$, on a bien $A^c \in C$. Soit F fermé et $\eta > 0$. Notons $O_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}; d(x, F) < \epsilon\}$. Comme l'application $x \mapsto d(x, F)$ est continue (elle est même lipschitzienne de rapport 1), O_ϵ est un ouvert. $\cap_{n\geq 1} O_{1/n} = F$, donc $\cap_{n\geq 1} O_{1/n} \backslash F = \varnothing$. D'après le théorème de continuité séquentielle décroissante $\lim_{n\to+\infty} m(O_{1/n}) = m(\varnothing) = 0$, donc il existe n tel que $m(O_{1/n} \backslash F) < \eta$. Comme η est quelconque, on a bien $F \in O$.

   (b) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille d'éléments de C. Posons $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. On va montrer que $A \in C$.

   Soit $\eta > 0$. Pour tout $n \geq 1$, il existe un fermé F_n et un ouvert O_n avec $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \backslash F_n) < \eta/2^{n+1}$. Posons $O = \cup_{n\geq 1}$: par construction, O est onvert et $A \subset O$. Posons

$$R = \cup_{n\geq 1}(O_n \backslash F_n).$$

Notons que donc

$$m(R) \leq \sum_{n\geq 1} m(O_n\backslash F_n) \leq \eta/2.$$

Posons $A'_n = \cup_{i=1}^n A_i$. (A'_n) est une suite croissante d'ensembles dont la réunion est A: d'après le théorème de continuité séquentielle croissante, on a $m(A) = \lim m(A'_n)$, donc il existe n_0 tel que $m(A'_{n_0}) > m(A) - \eta/2$ Posons $F = \cup_{i=1}^{n_0} F_i$. Par construction, F est fermé.

$$\begin{aligned} O\backslash F &= (O\backslash A) \cup (A\backslash F) \\ &\subset (O\backslash A) \cup (A\backslash A'_{n_0}) \cup (A'_{n_0}\backslash F) \end{aligned}$$

Or

$$O\backslash A = \cup_{n\geq 1}(O_n\backslash A) \subset \cup_{n\geq 1}(O_n\backslash A_n) \subset \cup_{n\geq 1}(O_n\backslash F_n) = R,$$

d'une part et

$$A'_{n_0}\backslash F = \cup_{i=1}^{n_0} A_i \cap F^c \subset \cup_{i=1}^{n_0} A_i \cap F_i^c \subset \cup_{i=1}^{n_0} O_i \cap F_i^c \subset R$$

d'autre part. Ainsi

$$O\backslash F \subset (A\backslash A'_{n_0}) \cup R$$

et $m(O\backslash F) \leq m(A\backslash A'_{n_0}) + m(R) < \eta$. C est donc une sous-tribu de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Mais elle contient tout les fermés, qui engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, donc C est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Pour tout fermé inclus dans A, $m(F) \leq m(A)$. Mais d'après ce qui précède, pour tout $\eta > 0$ on peut trouver un fermé F et un ouvert O avec $F \subset A \subset O$ avec $m(O\backslash F) < \eta$: $m(F) = m(A) - m(A\backslash F) \geq m(A) - m(O\backslash F) > m(A) - \eta$. Cela montre que $m(A) = \sup\{m(F); F \text{ fermé } \subset A\}$. L'autre identité se traite de la même manière.

2. (a)

$$\begin{aligned} Q_r f(x) &= \frac{1}{2r}\int_{B_r(y)} f(y)\, d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}} f(y) 1\!\!1_{B_r(x)}(y)\, d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}} f(y) 1\!\!1_{B_r(0)}(y-x)\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{r}\frac{1}{2} 1\!\!1_{B_1(0)}\left(\frac{y-x}{r}\right)\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi_r(y-x) = (f*\phi_r)(x), \end{aligned}$$

avec $\phi(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{B_1(0)}$. Comme ϕ est positive d'intégrale 1, le résultat découle de la proposition admise en exergue de l'énoncé.

(b) Par définition de la borne supérieure, si $Rf(x) > \eta$, il existe $r_x > 0$ tel que $Q_{r_x}|f|(x) > 0$, soit $\int_{B_{r_x}} |f| \, d\lambda > \eta\lambda(B_{r_x}(x))$.
Soit $K > 0$. On a évidemment

$$B(0,K) \cap \{Rf(x) > \eta\} \subset \bigcup_{\substack{x: x \in B(0,K), \\ Rf(x) > \eta}} B(x, r_x).$$

Si la famille des r_x n'est pas bornée, elle contient un élément dépassant $2M$: cette seule boule suffit à recouvrir $B(0,K) \cap \{Rf(x) > \eta\}$ (et forme donc une famille deux à deux disjointe !). Sinon, si la famille des r_x est bornée, on peut considérer la famille associée à cette famille de boules par le lemme de Vitali. Comme la famille des boules $B_{r_j}(t_j)$ est disjointe et dénombrable, on a

$$\int |f| \, d\lambda \geq \sum_{j \in J} \int_{B_{r_j}(t_j)} |f| \, d\lambda \geq \sum_{j \in J} \eta\lambda(B_{r_j}(t_j)),$$

d'après la propriété définissant les r_x. D'autre part

$$\sum_{j \in J} \eta\lambda(B_{r_j}(t_j)) = \sum_{j \in J} \frac{1}{3}\eta\lambda(B_{3r_j}(t_j)) \geq \frac{1}{3}\lambda\left(\cup_{j \in J} B_{3r_j}(t_j)\right)$$

Mais

$$\bigcup_{j \in J} B_{3r_j}(t_j) \supset \bigcup_{\substack{t: t \in \{Rf > \eta\}, \\ t \in B(0,K)}} B_{r_t}(t) \supset B(0,K) \cap \{Rf > \eta\},$$

d'où finalement

$$\|f\|_1 \geq \frac{1}{3}\eta\lambda(B(0,K) \cap \{Rf > \eta\}).$$

Avec le théorème de continuité séquentielle croissante, on obtient

$$\|f\|_1 \geq \frac{1}{3}\eta\lambda(Rf > \eta),$$

ce qui donne le résultat voulu avec $A = 3$.

(c) Si g est continue à support compact, g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: notons $\omega_g(\eta) = \sup\{|g(x) - g(y)|; |x - y| \leq \eta\}$; ω_g a une limite nulle en 0. On a

$$\begin{aligned}
|Q_r g(x) - g(x)| &= \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) - f(x) \, d\lambda(y) \\
&\leq \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \\
&\leq \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \omega_g(r) \\
&\leq \omega_g(r)
\end{aligned}$$

D'où $\|Q_r g - g\|_\infty \leq \omega_g(r)$, tend donc vers 0 lorsque r tend vers 0. Comme $Q_r f(x)$ tend vers $f(x)$ quand r tend vers zéro, la limite supérieure et la limite inférieure coïncident toutes deux avec $f(x)$, donc $\Delta g(x) = 0$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de $\Delta f(x)$, il existe r_1 et r_2 strictement positifs, avec $Q_{r_1} f(x) - Q_{r_2} f(x) \geq \Delta f(x) - \epsilon$. On en déduit $\max(Q_{r_1} f(x), -Q_{r_2} f(x)) \geq \frac{\Delta f(x)-\epsilon}{2}$, d'où

$$\max(Q_{r_1}|f|(x), Q_{r_2}|f|(x)) \geq \frac{\Delta f(x) - \epsilon}{2},$$

d'où finalement $Rf(x) \geq \frac{\Delta f(x)-\epsilon}{2}$. Comme ϵ peut être pris arbitrairement petit, on a $Rf(x) \geq \frac{\Delta f(x)}{2}$, d'où

$$\lambda(\Delta f > \eta) \leq \lambda(Rf > \eta/2) \leq \frac{2A\|f\|_1}{\eta}$$

d'après le (b). La limite supérieure d'une somme est plus petite que la somme des limites supérieures et la limite inférieure d'une somme est plus grande que la somme des limittes inférieures. On en déduit que quelques soient les fonctions g et h dans L^1, on a $\Delta(g+h) \leq \Delta g + \Delta h$. Soit $\eta > 0$ et $\epsilon > 0$. Comme l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^1, il existe g continue à support compact et h dans L^1 avec $f = g + h$ et $\|h\|_1 \leq \epsilon$. Ainsi $\Delta f = \Delta(g+h) \leq \Delta f + \Delta h = \Delta h$. On a donc

$$\lambda(\Delta f > \eta) \leq \lambda(\Delta h > \eta) \leq \frac{2A\|h\|_1}{\eta} \leq \frac{2A\epsilon}{\eta}.$$

Comme ϵ peut être pris arbitrairement petit, on a $\lambda(\Delta f > \eta) = 0$, d'où par continuité séquentielle décroissante $\lambda(\Delta f > 0) = 0$, soit $\Delta f = 0$, λ presque partout. Ainsi, pour λ presque tout x, $\Delta f(x)$, ce qui signifie que $Q_r f(x)$ converge: $Q_r f(x)$ converge presque partout vers une limite $\ell(x)$. Cependant $Q_r f$ tend dans L^1 vers $f(x)$: il existe donc une suite r_n de limite nulle avec $Q_{r_n} f$ qui tend presque partout vers $f(x)$. Mais $Q_{r_n} f(x)$ converge aussi presque partout vers $\ell(x)$, donc $f(x) = \ell(x)$ presque partout. Finalement $Q_r f(x)$ converge presque partout vers $f(x)$.

3. (a) Notons $A_N = \{x : D_\nu(x) < N\} \cap A$. On a

$$\cup_{N \geq 1} A_N = \{D_\nu < +\infty\} \cap A.$$

D'après le théorème de continuité séquentielle croissante, on a

$$\lim_{N \to +\infty} \nu(A_N) = \nu(\{D_\nu < +\infty\} \cap A) = \nu(A),$$

où la dernière égalité vient de l'hypothèse faite sur D_ν. Ainsi, si N est suffisamment grand, $\nu(A_N) \geq \nu(A) - \eta$, ce qui fait que A_N vérifie les conditions recherchées.

(b) Comme $\lambda(A) = 0$, d'après 1.(b), il existe $O \supset A$ avec $\lambda(O) < \delta$. Soit $x \in A_N$. $A_N \subset A \subset O$ donc il existe r_x^1 tel que $B_{r_x^1}(x) \subset O$. Comme $D_\nu(x) < N$, d'après la définition de $D_\nu(x)$, il existe $r_x \leq r_x^1 \wedge 1$ avec

$$\frac{\nu(B_{3r_x}(x))}{2.(3r_x)} \leq N.$$

Finalement, on a bien $B_{r_x}(x) \subset O$ et $\nu(B_{3r_x}(x)) \leq 6Nr_x$.

(c) On utilise comme précédemment le lemme de recouvrement de Vitali: On peut extraire de la famille des $B_{r_x}(x)$ où x décrit A_N une sous-famille dénombrable de boules disjointes $B_{r_j}(x_j)$ avec $\cup_{j\in J} B_{3r_j}(x_j) \supset \cup_{x\in A_N} B_{r_x}(x)$.

$$\nu(A_N) \leq \nu(\cup_{x\in A_N} B_{r_x}(x)) \leq (\nu \cup_{j\in J} B_{3r_j}(x_j)) = \sum_{j\in J} \nu(B_{3r_j}(x_j))$$

Or

$$\sum_{j\in J} \nu(B_{3r_j}(x_j)) \leq \sum_{j\in J} CNr_x = \sum_{j\in J} \frac{CN}{2}\lambda(B_{r_j}(x_j) = \frac{CN}{2}\lambda(\cup_{j\in J} B_{r_j}(x_j)) \leq \frac{CN}{2}\lambda(O)$$

Ici, on a successivement utilisé que les boules sont disjointes et que leur réunion est inclue dans O. Finalement

$$\nu(A_N) \leq \frac{CN}{2}\lambda(O) \leq \frac{CN}{2}\delta.$$

Comme δ peut être choisi arbitrairement petit, on a $\nu(A_N) = 0$. Or $\nu(A_N) \geq \nu(A) - \eta$, donc $\nu(A) \leq \eta$. Comme η peut être choisi arbitrairement petit, on a $\nu(A) = 0$. Ainsi on a montré que sous l'hypothèse que D_ν est fini ν-presque partout, $\lambda(A) = 0$ entraîne $\nu(A) = 0$, ce qui signifie que ν est absolument continue par rapport à λ.

Partie V

1. D'après IV.3, ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit f la densité de ν par rapport à λ.

$$\frac{\nu(B_r(x))}{2r} = \frac{\int_{B_r(x)} f \, d\lambda}{\lambda(B_r(x))} = Q_r f(x).$$

Or, on a d'une part, d'après IV.2.(d) $\lim_{r\to 0} Q_r f(x) = f(x)$ λ presque partout, D'autre part $D_\nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{2r}$, donc finalement $f(x) = D_\nu(x)$ λ presque partout: $D_\nu(x)$ est bien une version de la densité de ν par rapport à λ.

2. Comme $M(K) = \int_K (\int_R D_\alpha(x) d\nu_\alpha(x)) \, d\lambda(\alpha) < +\infty$ et que $\int_R D_\alpha(x) d\nu_\alpha(x) \geq 0$, cela signifie que pour λ presque α, $\int_R D_\alpha(x) d\nu_\alpha(x) < +\infty$. Soit α un

tel réel. Comme $\int_R D_\alpha(x)d\nu_\alpha(x) < +\infty$, $D_{nu_\alpha}(x)$ est finie pour presque tout x et alors, d'après V.1, $D_{\nu_\alpha}(x)$ est une version de la densité de ν_α par rapport à la mesure de Lebesgue. Reste à voir que pour $D_{\nu_\alpha}(x)$ est-dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\int_{\mathbb{R}}(D_{\nu_\alpha}(x))^2\ d\lambda(x) < +\infty$, mais en fait c'est exactement ce que dit la condition $\int_R D_\alpha(x)d\nu_\alpha(x) < +\infty$, puisque D_α est la densité de ν_α par rapport à la mesure de Lebesgue.

3. (a) Comme $V^\alpha = \sum_{k\geq 0}\alpha^k\epsilon_{k+1} = \Pi_\alpha(\epsilon_n)_{n\geq 1}$, ν_α est la loi image de la loi de $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ par Π_α, c'est à dire la loi image de P par Π_α.

   (b) Pour tout borélien A, le théorème de transfert dit que

$$\nu_\alpha(A) = P(\Pi_{alpha} \in A) = \int_\Omega 1\!\!1_A(\omega')\ dP(\omega')$$

   En particulier, si $A = B_r(\Pi_\alpha(\omega)), 1\!\!1_A(\omega') = 1\!\!1_{\{|\Pi_\alpha(\omega)-\Pi_\alpha(\omega')|\leq r\}}$ et

$$\nu_\alpha(B_r(\Pi_\alpha(\omega))) = \int_\Omega 1\!\!1_{\{|\Pi_\alpha(\omega)-\Pi_\alpha(\omega')|\leq r\}}\ dP(\omega').$$

   Maintenant, considérant la définition de D_α et le lemme de Fatou, on a

$$M(K) \leq \liminf_{r\to 0}\int_K\int_{\mathbb{R}}\frac{\nu(B_r(x))}{2r}\ d\nu_\alpha(x)\ d\lambda(\alpha).$$

   Or

$$\begin{aligned}
&\int_K\int_{\mathbb{R}}\frac{\nu(B_r(x))}{2r}\ d\nu_\alpha(x)\ d\lambda(\alpha)\\
=\ &\int_K\int_\Omega\frac{\nu(B_r(\Pi_\alpha(\omega)))}{2r}\ dP(\omega)\ d\lambda(\alpha)\\
=\ &\frac{1}{2r}\int_K\int_\Omega\int_\Omega 1\!\!1_{\{|\Pi_\alpha(\omega)-\Pi_\alpha(\omega')|\leq r\}}\ dP(\omega')\ dP(\omega)\ d\lambda(\alpha)\\
=\ &\frac{1}{2r}\int_\Omega\int_\Omega\int_K 1\!\!1_{\{|\Pi_\alpha(\omega)-\Pi_\alpha(\omega')|\leq r\}}\ d\lambda(\alpha)\ dP(\omega')\ dP(\omega)\\
=\ &\frac{1}{2r}\int_\Omega\int_\Omega\lambda(\alpha\in K : |\Pi_\alpha(\omega)-\Pi_\alpha(\omega')|\leq r)\ dP(\omega')\ dP(\omega)
\end{aligned}$$

   la première égalité vient du théorème de transfert, la deuxième de l'identité qu'on a juste démontrée, et la troisième du théorème de Tonelli. Cela donne l'inégalité voulue.

(c)

$$\begin{aligned}
\phi'_\alpha(\omega,\omega') &= \sum_{n\geq 0}(\omega_n-\omega'_n)\alpha^n \\
&= \sum_{n\geq k}(\omega_n-\omega'_n)\alpha^n \\
&= \sum_{n\geq k}(\omega_k-\omega'_k)^2(\omega_n-\omega'_n)\alpha^n \\
&= (\omega_k-\omega'_k)\alpha^k\sum_{i\geq 0}(\omega_k-\omega'_k)(\omega_{i+k}-\omega'_{i+k})\alpha^i \\
&= (\omega_k-\omega'_k)\alpha^k\left(1+\sum_{i\geq 1}(\omega_k-\omega'_k)(\omega_{i+k}-\omega'_{i+k})\alpha^i\right)
\end{aligned}$$

On a utilisé que $|\omega_k-\omega'_k|=1$ et que $\omega_n=\omega'_n$ pour $i<n$. Finalement, remarquons que $(\omega_k-\omega'_k)(\omega_{i+k}-\omega'_{i+k})$ est à valeurs dans $\{0,+1,-1\}$.

4. (a) Si $\{\alpha\in K;|h(\alpha)|\leq\rho\}$ est vide, la mesure est nulle et il n'y a rien à démontrer. Sinon, posons $x_0=\inf\{\alpha\in K;h(\alpha)|\leq\rho\}$. Je dis que pour tout y tel que $x_0+y\in K$, on a $g(x_0+y)<g(x_0)-\delta y$. Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas: on peut poser $y_0=\inf\{y>0;h(x_0+y)\geq h(x_0)-\delta y$. Par continuité, on a $h(x_0+y_0)=h(x_0)-\delta y_0$, donc d'après l'égalité des accroisements finis, il existe $y\in(0,y_0)$ avec $-\delta=\frac{h(x_0+y_0)-h(x_0)}{y_0}=h'(x_0+y)$. Pour tout $y\in[0,y_0)$ $h(x_0+y)<h(x_0)-\delta y\leq h(x_0)<\delta$, donc $h'(x_0+y)<-\delta$ d'après l'hypothèse de transversalité. On a ainsi une contradiction. Pour $y\in K$ avec $y>2\rho/\delta$, on a donc $g(x_0+y)<g(x_0)-\delta y\leq g(x_0)-2\rho\leq\delta-2\rho<-\rho$, donc $x_0+y\notin\{\alpha\in K;|h(\alpha)|\leq\rho\}$. Finalement $\{\alpha\in K;|h(\alpha)|\leq\rho\}\subset[x_0,x_0+2\rho/\delta]$, d'où $\lambda(\{\alpha\in K;|h(\alpha)|\leq\rho\})\leq 2\rho/\delta$.

   (b) $|g(\alpha,\omega,\omega')|=|\phi_\alpha(\omega,\omega')|/2\alpha^{-k}$.Comme $\alpha\geq\lambda_0$ pour tout α dans K, on a bien

$$\phi_\alpha(\omega,\omega')\leq r\Longrightarrow|g(\alpha,\omega,\omega')|\leq\lambda_0^{-k}r/2.$$

   (c) Cette remarque entraîne que

$$\lambda(\alpha\in K,|\phi_\alpha(\omega,\omega')|\leq r)\leq\lambda(\alpha\in K,|g(\alpha,\omega,\omega')|\leq\lambda_0^{-k}r/2).$$

   Si $\lambda_0^{-k}r/2<\delta$, l'inégalité $\lambda(\alpha\in K,|g(\alpha,\omega,\omega')|\leq\lambda_0^{-k}r/2)\leq\frac{r}{\delta\lambda_0^k}$ découle de (a), sinon $\frac{r}{\delta\lambda_0^k}\geq 1/2>\lambda(K)$ et on a encore le résultat voulu.

   (d) Avec $3(b)$, il vient

$$M(K)\leq\liminf_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_\Omega\int_\Omega\frac{r}{\delta\lambda_0^{k(\omega,\omega')}}\,dP(\omega')\,dP(\omega),$$

soit
$$M(K) \leq \frac{1}{2\delta} \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{\lambda_0^{k(\omega,\omega')}} \; dP(\omega') \; dP(\omega).$$

Sous $P \otimes P'$, $k(\omega,\omega')$ suit une loi géométrique de paramètre $(P \otimes P')(\omega'_1 \neq \omega') = 1/2$, donc
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{r}{\delta \lambda_0^{k(\omega,\omega')}} \; dP(\omega') \; dP(\omega) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \lambda_0^{-n} = \frac{\frac{1}{2\lambda}}{1 - \frac{1}{2\lambda}} < +\infty.$$

Finalement $M(K) < +\infty$.

(e) Supposons acquise la condition de transversalité. Soit $n \geq 1$. D'après la condition de transversalité et 4(d) $M(]1/\sqrt{2}+1/n, 1-1/n[) < +\infty$, donc d'après V.2, pour presque tout α dans $]1/2+1/n, 1/\sqrt{2}-1/n[$, ν_α est absolument continue avec une densité dans L^2. Par réunion dénombrable, ν_α est absolument continue avec une densité dans L^2 pour presque tout $\alpha \in]1/2, 1/\sqrt{2}[$, ou encore pour presque tout $\alpha \in [1/2, 1/\sqrt{2}]$ (deux points sont de mesure nulle).

Montrons que si ν_α est absolument continue avec une densité dans L^2, alors $\nu_{\sqrt{\alpha}}$ est absolument continue avec une densité dans L^2, autrement dit que si ν_{α^2} est absolument continue avec une densité dans L^2, alors ν_α est absolument continue avec une densité dans L^2. Il s'agit de raffiner le raisonnement fait en III.7 a,b. La densité de ν_α par rapport à Lebesgue est $x \mapsto \int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}(x-y) d\mathbb{P}_Y(y)$
$$\begin{aligned}
& \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}(x-y) d\mathbb{P}_Y(y) \right)^2 \; d\lambda(x) \\
= \; & \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}(x-y) d\mathbb{P}_Y(y) \right) \; d\nu_{\alpha^2}(x) \\
= \; & \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}(x-y) \; d\nu_{\alpha^2}(x) \right) \; d\mathbb{P}_Y(y) \\
= \; & \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}(x-y) f_{\alpha^2}(x) \; d\lambda(x) \right) \; d\mathbb{P}_Y(y)
\end{aligned}$$

Or, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout y
$$\int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}(x-y) f_{\alpha^2}(x) \; d\lambda(x) \leq \|f_{\alpha^2}\|_2 \|f_{\alpha^2}(.-y)\|_2 = \|f_{\alpha^2}\|_2^2 = \int_\mathbb{R} f_{\alpha^2}^2 \; d\lambda < +\infty.$$

Ainsi, par applications successives de la fonction racine, on montre par récurrence que pour tout n, ν_α est absolument continue avec une densité dans L^2 pour presque tout $\alpha \in [(1/2)^{(1/2)^n}, (1/2)^{(1/2)^{n+1}}]$, puis en faisant la réunion sur tous les n, ν_α est absolument continue avec une densité dans L^2 pour presque tout $\alpha \in [1/2, 1[$.

FIN