Epreuve de Probabilités

Soient $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*) telles que $P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_1 = -1) = 1/2$. On fixe un paramètre $\alpha > 0$ et on définit une suite de variables aléatoires $(U_n^\alpha)_{n\geq 0}$ par $U_0^\alpha = 0$ et $U_{n+1}^\alpha = \alpha U_n^\alpha + \varepsilon_{n+1}$, pour $n \geq 0$. On s'intéresse à la limite de $(U_n^\alpha)_{n\geq 0}$ en loi, en fonction de α.

Les parties du problème sont essentiellement indépendantes. Il sera tenu compte de la clarté du raisonnement et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.

NB :

- Les espaces $L^p(\mathbb{R})$, où $p \geq 1$, sont sous-entendus par rapport à la mesure de Lebesgue λ et la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$. La norme de f dans $L^p(\mathbb{R})$ est notée $\|f\|_p$.
- Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive telle que $\int \varphi(x)\, dx = 1$. On pose $\varphi_r(x) = r^{-1}\varphi(x/r)$, pour $r > 0$. On pourra utiliser le fait que $f * \varphi_r \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$, quand $r \to 0_+$.
- La fin de la partie III et la partie IV mentionnent la notion d'absolue continuité entre deux mesures de probabilité, mais essentiellement seule la définition est utilisée. En particulier, le théorème de Radon-Nikodym n'est pas supposé connu. Rappelons que ν est absolument continue par rapport à μ si $d\nu = f d\mu$. Dans ce cas f (unique, à un ensemble de μ-mesure nulle près) est la "densité de ν par rapport à μ".

Partie I

1. Vérifier que $(U_n^\alpha)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Donner son opérateur de transition et sa loi initiale.
2. Si $\alpha = 1$, $(U_n^1)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Rappeler pourquoi la Loi des Grands Nombres et le Théorème de la Limite Centrale s'appliquent. Enoncer ces résultats.
3. On suppose $\alpha > 1$. On fixe alors un entier $k_0 \geq 1$ tel que $\alpha^{k_0} > 2$.
   (a) On définit un événement $A_n = \{\varepsilon_{nk_0+1} = \cdots = \varepsilon_{(n+1)k_0}$ et $\varepsilon_{nk_0+1} U_{nk_0}^\alpha \geq 0\}$, pour $n \geq 0$. Détailler A_n^c, puis établir que pour tout $n \geq 0$:
   $$P\left(\bigcap_{0\leq m\leq n+1} A_m^c\right) \leq (1 - 2^{-k_0}) P\left(\bigcap_{0\leq m\leq n} A_m^c\right).$$
   (b) Montrer que presque sûrement, il existe $n \geq 1$ tel que $|U_n^\alpha| > \frac{1}{\alpha - 1}$. On pourra utiliser la relation $U_{n+k}^\alpha = \alpha^k U_n^\alpha + \varepsilon_{n+k} + \alpha\varepsilon_{n+k-1} + \cdots + \alpha^{k-1}\varepsilon_{n+1}$, pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$.
   (c) En déduire que $P(|U_n^\alpha| \to +\infty$, quand $n \to +\infty) = 1$.

Pour toute la suite du problème, on suppose que $0 < \alpha < 1$. On introduit alors :

$$V_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\varepsilon_k, \text{ pour } n \geq 1, \text{ et } V^\alpha = \sum_{k\geq 1} \alpha^{k-1}\varepsilon_k.$$

La loi de V^α est notée ν_α.

Partie II

1. Montrer que (U_n^α) converge en loi vers V^α, quand $n \to +\infty$. Cette suite converge-t-elle presque sûrement ?

2. Soit $F_\alpha(t) = P(V^\alpha \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition de V^α. Rappelons que F_α est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point t, notée $F_\alpha(t^-)$.

   (a) Montrer que $V^\alpha = \alpha V^{\alpha,1} + \varepsilon_1$, où $V^{\alpha,1}$ a même loi que V^α, puis que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$F_\alpha(t) = \frac{1}{2} F_\alpha\left(\frac{t+1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} F_\alpha\left(\frac{t-1}{\alpha}\right). \tag{1}$$

   (b) Si ν_α a une densité, donner la relation vérifiée par cette dernière.

   (c) On souhaite établir le fait que F_α est une fonction continue. On raisonne par l'absurde et on suppose donc F_α non continue. Pour $n \geq 1$, on pose $D_n = \{t \in \mathbb{R}, F_\alpha(t^-) < F_\alpha(t) - 1/n\}$.

      i. Montrer qu'il existe $n_0 \geq 1$ pour lequel D_{n_0} est fini et non vide.

      ii. Introduisons $s = \max\{F_\alpha(t) - F_\alpha(t^-), t \in D_{n_0}\}$. Conclure en considérant par exemple la relation (1) au point $t_0 = \max\{t \in D_{n_0}, F_\alpha(t) - F_\alpha(t^-) = s\}$.

3. Soit ν une loi dont la fonction de répartition vérifie la même relation que F_α, c'est-à-dire (1). On considère Y_0 de loi ν et indépendante des (ε_n). Soit $Y_{n+1} = \alpha Y_n + \varepsilon_{n+1}$, pour $n \geq 0$.

   (a) Vérifier que Y_n a pour loi ν, pour tout $n \geq 0$.

   (b) Montrer que ν_α est la seule loi dont la fonction de répartition satisfait (1).

Partie III

Désignons par S_α le support de ν_α. Rappelons que c'est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ de ν_α-mesure totale. On introduit $I_\alpha = \left[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right]$, ainsi que les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$T_{\alpha,+}(x) = \alpha x + 1 \text{ et } T_{\alpha,-}(x) = \alpha x - 1.$$

1. Montrer que $S_\alpha \subset I_\alpha$, puis que $S_\alpha = T_{\alpha,+}(S_\alpha) \cup T_{\alpha,-}(S_\alpha)$.

2. Supposons que $0 < \alpha < 1/2$.

   (a) Montrer que V_n^α prend au plus 2^n valeurs distinctes et que $|V^\alpha - V_n^\alpha| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

   (b) En déduire que la mesure de Lebesgue de S_α est nulle.

3. De nouveau, $0 < \alpha < 1$. Montrer que $E(e^{itV^\alpha}) = \prod_{n\geq 1} \cos(t\alpha^{n-1})$, $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Etablir que les deux fonctions précédentes coïncident lorsque $\alpha = 1/2$.

4. Dans cette question, $1/2 < \alpha < 1$. Introduisons :
   $$H_\alpha = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\xi_k, \text{ pour un } n \geq 1 \text{ et des } \xi_k \in \{\pm 1\} \right\}.$$

   (a) Soient $I_{\alpha,+} = \left[\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right]$ et $I_{\alpha,-} = \left[-\frac{1}{1-\alpha}, \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right]$. Vérifier que $I_\alpha = I_{\alpha,+} \cup I_{\alpha,-}$, ainsi que les égalités $T_{\alpha,+}(I_\alpha) = I_{\alpha,+}$, $T_{\alpha,-}(I_\alpha) = I_{\alpha,-}$.

(b) Soit $x \in I_\alpha$. En utilisant $T_{\alpha,+}$ et $T_{\alpha,-}$, montrer qu'il existe $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \{\pm 1\}^n$ tels que :

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} \xi_k \right| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

En déduire que H_α est dense dans I_α.

(c) Montrer que F_α est strictement croissante sur I_α, puis que $S_\alpha = I_\alpha$.

5. On suppose toujours $1/2 < \alpha < 1$. Le résultat précédent suggère que pour un tel α, la mesure ν_α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En fait, ce n'est pas le cas. Pour le voir, on considère le nombre d'or $u = (1+\sqrt{5})/2$ et $\alpha = 1/u \in]1/2, 1[$.

(a) Vérifier que $d(u^n, \mathbb{Z})$ tend vers 0 au moins exponentiellement vite quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire $d(u^n, \mathbb{Z}) \leq C\rho^n$, pour des constantes $C > 0$ et $0 < \rho < 1$), où $d(x, \mathbb{Z})$ désigne la distance d'un réel x à $\mathbb{Z}$. Montrer également que $u^n - 1/2 \notin \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Rappelons que u est racine du polynôme $X^2 - X - 1$. Si v désigne l'autre racine, on pourra calculer $u^n + v^n$.

(b) Supposons que ν_α ait une densité $f \in L^1(\mathbb{R})$. On note $\chi_f(t) = \int e^{-itx} f(x) dx$, $t \in \mathbb{R}$, sa transformée de Fourier. Posons $t_n = \pi u^n$, pour $n \geq 1$. Etablir l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty} |\chi_f(t_n)| = \left| \prod_{k \geq 1} \cos(\pi \alpha^k) \prod_{l \geq 1} \cos(\pi u^l) \right|.$$

(c) Vérifier que la limite est non nulle et en déduire une contradiction.

6. Soit $0 < \alpha < 1$.

(a) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X a une densité. Montrer que $X + Y$ a une densité.

(b) Montrer que si ν_{α^2} est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il en est de même pour ν_α.

(c) Vérifier que $\nu_{2^{-1/p}}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, pour tout $p \geq 1$.

Partie IV

On s'intéresse à l'absolue continuité de ν_α par rapport à la mesure de Lebesgue pour $\alpha \in]1/2, 1[$. Cette propriété n'étant pas vraie pour tous les α, on se pose la question dans un sens plus faible, à savoir pour "presque tout" $\alpha \in]1/2, 1[$. Cette partie établit un critère de vérification.

1. Soit m une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit :

$$C = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid \forall \eta > 0, \exists O \text{ ouvert et } F \text{ fermé tels que } F \subset A \subset O \text{ et } m(O \backslash F) < \eta\}.$$

(a) Montrer que C est stable par passage au complémentaire et contient les fermés de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que C est une tribu. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$m(A) = \sup\{m(F) \mid F \text{ fermé } \subset A\} = \inf\{m(O) \mid O \text{ ouvert}, A \subset O\}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, notons $B_r(x) = [x - r, x + r]$ la boule de centre x et de rayon r. Pour la suite, on rappelle le lemme de recouvrement de Vitali, que l'on pourra utiliser librement :

   Lemme : *Soit $(B_{r_t}(t))_{t\in T}$ une famille quelconque de boules dans $\mathbb{R}$ de rayons non nuls et bornés. Alors il existe une sous-famille notée $(B_{r_j}(t_j))_{j\in J}$, finie ou dénombrable, telle que les $(B_{r_j}(t_j))_{j\in J}$ soient deux à deux disjoints et vérifient $\cup_{t\in T} B_{r_t}(t) \subset \cup_{j\in J} B_{3r_j}(t_j)$.*

   Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ on pose :

$$Q_r f(x) = \int_{B_r(x)} f d\lambda / \lambda(B_r(x)) \text{ et } Rf(x) = \sup\{Q_r|f|(x), r > 0\}.$$

   (a) Rappeler pourquoi $Q_r f \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$, quand $r \to 0_+$.

   (b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\eta > 0$. Montrer que pour tout $x \in \{Rf > \eta\}$, il existe une boule $B_{r_x}(x)$ avec $r_x > 0$ telle que $\int_{B_{r_x}(x)} |f| d\lambda > \eta\lambda(B_{r_x}(x))$. En déduire qu'il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $\eta > 0$:

$$\lambda(\{Rf > \eta\}) \leq A\|f\|_1/\eta.$$

   (c) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $\Delta f(x) = |\limsup_{r\to 0_+} Q_r f(x) - \liminf_{r\to 0_+} Q_r f(x)|$. Montrer que si g est continue à support compact, alors $Q_r g$ converge uniformément vers g quand $r \to 0_+$. En déduire que $\Delta g(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\eta > 0$, on a $\lambda(\{\Delta f > \eta\}) \leq 2A\|f\|_1/\eta$, puis que $\Delta f = 0$, λ-*pp*. En déduire le théorème de dérivation de Lebesgue :

$$\lim_{r\to 0_+} Q_r f = f, \ \lambda\text{-}pp.$$

3. Soit ν une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit :

$$D_\nu(x) = \liminf_{r\to 0_+} \frac{\nu(B_r(x))}{2r}.$$

   On fait l'hypothèse que D_ν est fini, ν-presque partout, et on cherche à montrer que ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela, rappelons qu'il suffit de prouver que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est tel que $\lambda(A) = 0$, alors $\nu(A) = 0$.

   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et $A_N \subset A$ tels que $\nu(A_N) \geq \nu(A) - \eta$ et $D_\nu(x) < N$, pour $x \in A_N$.

   (b) Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert O tel que $A \subset O$ avec $\lambda(O) < \delta$ tel que :

$$\forall x \in A_N, \exists r_x > 0, B_{r_x}(x) \subset O \text{ et } \nu(B_{3r_x}(x)) \leq CNr_x,$$

   où C est une constante numérique absolue (on pourra prouver que $C = 6$ convient).

   (c) En déduire que $\nu(A_N) \leq \frac{C}{2}N\delta$. Conclure.

Partie V

On utilise le critère établi dans la partie précédente.

1. Soit ν une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que sous l'hypothèse $D_\nu(x) < +\infty$ pour ν-presque tout x, alors $D_\nu(x)$ est une version de la densité de ν par rapport à λ.

2. Dans la suite, on simplifie D_{ν_α} en D_α. Soit K un intervalle ouvert inclus dans $]1/2, 1[$. Sous l'hypothèse

$$M(K) := \int_K \int_{\mathbb{R}} D_\alpha(x) d\nu_\alpha(x) d\alpha < +\infty,$$

montrer que ν_α admet une densité pour λ-presque tout $\alpha \in K$ et que cette densité est dans $L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$, muni de sa tribu usuelle et de la mesure de Bernoulli $P = (1/2, 1/2)^{\otimes \mathbb{N}}$. Un élément de Ω est une suite $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$. Soit :

$$\Pi_\alpha(\omega) = \sum_{n \geq 0} \omega_n \alpha^n.$$

   (a) Vérifier que $\nu_\alpha = P \circ \Pi_\alpha^{-1}$.

   (b) Etablir que $\nu_\alpha(B_r(\Pi_\alpha(\omega))) = \int_\Omega 1_{\{\omega' \in \Omega, |\Pi_\alpha(\omega) - \Pi_\alpha(\omega')| \leq r\}} dP(\omega')$, puis que :

$$M(K) \leq \liminf_{r \to 0_+} \frac{1}{2r} \int_\Omega \int_\Omega \lambda \left(\{\alpha \in K, |\Pi_\alpha(\omega) - \Pi_\alpha(\omega')| \leq r\}\right) dP(\omega) dP(\omega').$$

   (c) Soient $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ et $\omega' = (\omega'_n)_{n \geq 0}$ dans Ω. On pose :

$$\varphi_\alpha(\omega, \omega') = \Pi_\alpha(\omega) - \Pi_\alpha(\omega') = \sum_{n \geq 0} (\omega_n - \omega'_n) \alpha^n.$$

   Vérifier que $\varphi_\alpha(\omega, \omega') = 2\alpha^k g(\alpha, \omega, \omega')$, où :

$$\begin{cases} k = k(\omega, \omega') = \min\{n \geq 0, \omega_n \neq \omega'_n\} \\ \\ g(\alpha, \omega, \omega') = \pm \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n \alpha^n\right), \text{ où } a_n \in \{-1, 0, +1\}. \end{cases}$$

4. Rappelons que $K \subset]1/2, 1[$. On travaille dans cette question sous l'hypothèse de transversalité $\mathcal{H}(K, \delta)$ suivante : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x dans K et toute fonction h de la forme

$$h(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n, \text{ où } a_n \in \{-1, 0, +1\}, \tag{2}$$

on ait $h(x) < \delta \Rightarrow h'(x) < -\delta$.

   (a) Soit h de la forme (2). Pour $\rho > 0$ tel que $0 < \rho < \delta$, montrer que h est décroissante sur l'ensemble $\{\alpha \in K, |h(\alpha)| \leq \rho\}$, avec $|h'(\alpha)| > \delta$ sur cet ensemble. En déduire que :

$$\lambda(\{\alpha \in K, |h(\alpha)| \leq \rho\}) \leq 2\rho/\delta.$$

   (b) Soit $K =]\lambda_0, \lambda_1[\subset]1/2, 1[$, pour toute la suite de la question 4. On fixe ω et ω' dans Ω. Montrer que si $\alpha \in K$ et $r \geq 0$:

$$|\varphi_\alpha(\omega, \omega')| \leq r \Rightarrow |g(\alpha, \omega, \omega')| \leq \lambda_0^{-k} r/2.$$

   (c) Pour $r \geq 0$, établir la majoration :

$$\lambda(\{\alpha \in K, |\varphi_\alpha(\omega, \omega')| \leq r\}) \leq \frac{r}{\delta \lambda_0^k}.$$

   (d) Montrer finalement que $M(K) < +\infty$.

5. En déduire que pour établir le fait que pour λ-presque tout $\alpha \in]1/2, 1[$ la mesure ν_α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité dans $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer une condition de transversalité $\mathcal{H}(]1/2, 2^{-1/2}[, \delta)$, pour un $\delta > 0$.

Fin de l'épreuve