C39121 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3ème année**
Mathématiques
Session 2009

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule.

Let but de ce problème est d'aborder la notion d'*ergodicité* pour un système dynamique.

Dans la suite, $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ désigne un système dynamique. Un tel système est déterminé par

– un ensemble X,
– une σ-algèbre $\mathcal{B}$ sur X,
– une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$,
– une application $\mathcal{B}$-mesurable $T: X \to X$.

Par commodité, nous supposerons toujours que μ est une mesure de probabilité, autrement dit $\mu(X) = 1$. Nous noterons $\mathcal{M}(\mu)$ l'ensemble des sous-ensembles μ-mesurables de X, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles $A \subseteq X$ tels qu'il existe $A_- \in \mathcal{B}$ et $A^+ \in \mathcal{B}$ vérifiant $A_- \subseteq A \subseteq A_+$ et $\mu(A_-) = \mu(A_+)$. L'ensemble $\mathcal{M}(\mu)$ est lui-même une σ-algèbre et μ est étendue en une mesure sur $\mathcal{M}(\mu)$ tout entier en posant $\mu(A) = \mu(A_-) = \mu(A_+)$.

Pout tout entier $k \geq 0$, on note T^k l'application de X dans X obtenue par k itérations successives de T (avec la convention que $T^0 = Id$). On note T^{-k} l'application réciproque de T^k, il s'agit d'une application de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même, où $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X.

Définition 1. *On dit que μ est une mesure invariante pour T, ou encore que T préserve μ, lorsque*

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) \qquad \textit{quel que soit } B \in \mathcal{B}.$$

La mesure image de μ par T, notée $T_*\mu$ et définie sur $\mathcal{B}$ par $T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$, est alors identique à la mesure μ.

Un sous-ensemble quelconque A de X est dit invariant par T si $T^{-1}(A) = A$. Ainsi, X et l'ensemble vide sont toujours des sous-ensembles invariants par T. Si T est bijective, l'invariance de A peut se réécrire sous la forme $T(A) = A$, mais dans le cas général ce n'est pas la même notion.

Un sous-ensemble mesurable $A \in \mathcal{M}(\mu)$ est dit presque invariant par T si la différence symétrique entre A et $T^{-1}(A)$ est de mesure nulle pour μ, autrement dit si $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$. Rappelons que pour deux sous-ensembles X_1 et X_2 de X, la différence symétrique entre X_1 et X_2, notée $X_1 \triangle X_2$, est définie par

$$X_1 \triangle X_2 = \Big(X_1 \setminus X_2\Big) \cup \Big(X_2 \setminus X_1\Big).$$

Lorsque X_1 et X_2 sont des éléments de $\mathcal{M}(\mu)$, il en va de même de $X_1 \triangle X_2$.

Définition 2. *Lorsque μ est une mesure invariante pour T, on dit que T est ergodique pour μ si quel que soit le sous-ensemble $A \in \mathcal{M}(\mu)$ invariant par T, soit $\mu(A) = 0$ soit $\mu(A) = 1$.*

De manière intuitive, T est ergodique pour μ s'il n'existe pas de sous-ensemble μ-mesurable A non trivial (au sens où $0 < \mu(A) < 1$) pour lequel les restrictions de T à A et à son complémentaire A^c définiraient deux sous-systèmes dynamiques. Ainsi, lorsque T est ergodique, les itérées successives d'un point $x \in X$ par T finissent par "visiter" tout l'espace X, dans un sens que nous allons préciser.

Dans la Partie I, on supposera disposer d'un système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ pour lequel μ est une mesure invariante pour T. On y démontrera le théorème ergodique en moyenne de Von Neumann. Dans la Partie II sera étudié le cas des rotations du cercle dont l'angle est un multiple irrationnel de 2π. L'approche utilisée est celle des séries de Fourier, on l'utilisera pour démontrer le théorème d'équirépartition de Weyl, duquel découle l'ergodicité. La Partie III abordera la question de l'existence et de la multiplicité des mesures invariantes μ lorsque X, $\mathcal{B}$ et T sont fixés. Enfin, dans la Partie IV, on montrera l'ergodicité du décalage de Bernoulli (équivalent au doublement de l'angle sur le cercle), et on en déduira un petit résultat sur la représentation (binaire) des nombres réels.

Partie I : Théorème ergodique en moyenne de Von Neumann.

Dans cette partie, on suppose que μ est une mesure invariante pour T.

Nous allons commencer par montrer que si $A \in \mathcal{M}(\mu)$ est presque invariant par T, alors il existe un ensemble $\hat{A} \in \mathcal{M}(\mu)$ qui est invariant par T et tel que $\mu(A \triangle \hat{A}) = 0$.

Fixons $A \in \mathcal{M}(\mu)$ presque invariant par T.

I.1. Montrer que quel que soit $B \in \mathcal{M}(\mu)$, on a l'inégalité triangulaire

$$\mu(T^{-2}(B) \triangle B) \leq \mu(T^{-2}(B) \triangle T^{-1}(B)) + \mu(T^{-1}(B) \triangle B).$$

I.2. En utilisant le fait que μ est invariante pour T, déduire que

$$\mu(T^{-2}(A) \triangle A) = 0.$$

I.3. Au moyen d'une récurrence sur n, déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(A \triangle T^{-n}(A)) = 0.$$

I.4. Montrer ensuite que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu(A \triangle \bigcup_{n=k+1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 0,$$

et enfin que

$$\mu(A \triangle \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k+1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 0.$$

I.5. Pour $B \in \mathcal{M}(\mu)$, on définit

$$\hat{B} = \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B) \right).$$

Montrer que $\hat{B}$ est invariant par T.

I.6. Déduire de ce qui précède que $\hat{A}$ est invariant par T et que $\mu(A \triangle \hat{A}) = 0$.

On désigne par $L^2(X, \mu, \mathbb{R})$ l'espace de Lebesgue des fonctions réelles de carré intégrable pour la mesure μ, quotienté par la relation d'équivalence d'égalité μ-presque partout. On rappelle que $L^2(X, \mu, \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\, g\, d\mu, \qquad \forall\, f, g \in L^2(X, \mu, \mathbb{R}).$$

L'application T induit une bijection linéaire unitaire (c'est-à-dire qui préserve la norme) U_T sur l'espace $L^2(X, \mu, \mathbb{R})$. Celle-ci est définie par

$$U_T(f) = f \circ T \qquad \forall\, f \in L^2(X, \mu, \mathbb{R}).$$

En effet, puisque la mesure image $T_*\mu$ est confondue avec μ, par le théorème du changement de variable dans les intégrales on a pour $f \in L^2(X,\mu,\mathbb{R}) = L^2(X,T_*\mu,\mathbb{R})$

$$\int_X |f\circ T|^2 \, d\mu = \int_{T(X)} |f|^2 \, dT_*\mu = \int_X |f|^2 \, d\mu,$$

car $\mu(T(X)) = \mu(T^{-1}(T(X)) = \mu(X)$ de sorte que $X \setminus T(X)$ est de μ-mesure nulle, au sens où $\mu(X \setminus T(X)) = 0$.

Nous allons montrer que si T est ergodique, alors les seuls points fixes de l'application U_T sont les (classes des) fonctions constantes.

I.7. Montrer que si $f \in L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ est un point fixe de U_T alors quel que soit $a \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble de niveau $f^{-1}((-\infty,a))$ (bien défini à un sous-ensemble de μ-mesure nulle) est presque invariant pour T.

I.8. Déduire du point précédent et de I.6 que si T est ergodique, alors les seuls points fixes de U_T sont les (classes des) fonctions constantes.

On désigne par R l'image de $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ par l'application $Id - U_T$, et par K le noyau de $Id - U_T$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}_*$ et $f \in L^2(X,\mu,\mathbb{R})$, on note

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k.$$

On note P_K la projection orthogonale de $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ sur K (pour le produit scalaire usuel). Enfin, si $J \subset L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ est une partie quelconque, on note $J^\perp$ son orthogonal (toujours pour le produit scalaire usuel).

I.9. Montrer que R et K sont orthogonaux dans $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$. *(On pourra utiliser le fait que l'application U_T étant unitaire, elle conserve les produits scalaires.)*

I.10. Montrer que si $f \in R^\perp$ alors $f \in K$.

I.11. Déduire que $(R \oplus K)^\perp = \{0\}$ et ensuite que $R \oplus K$ est dense dans $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$.

I.12. Montrer que pour tout $f \in K$, $S_n(f) \to f$ dans $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.

I.13. Montrer que pour tout $f \in R$, $S_n(f) \to 0$ dans $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.
(On écrira par exemple $f = g - U_T(g)$ pour un certain $g \in L^2(X,\mu,\mathbb{R})$.)

I.14. Déduire que pour tout $f \in L^2(X,\mu,\mathbb{R}) = \overline{R \oplus K}$, $S_n(f) \to P_K(f)$ dans $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.

I.15. Démontrer le Théorème ergodique de Von Neumann : Si T est ergodique pour μ, alors quelle que soit $f \in L^2(X,\mu,\mathbb{R})$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k \to \int_X f \, d\mu$$

dans l'espace $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$.

I.16. Montrer que T est ergodique pour μ si et seulement si quels que soient les éléments A et B de $\mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A)\cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Partie II : Théorème d'équirépartition de Weyl.

Dans cette partie $X = \mathbb{T}^1$ est le tore plat en dimension un, correspondant à l'espace métrique quotient de l'intervalle $[0,1]$ (muni de la distance euclidienne) par la relation d'équivalence identifiant ses deux extrémités. La mesure μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$ et la tribu $\mathcal{B}$ est celle des boréliens. L'application T est donnée par

$$T(x) = x + \alpha \quad \text{(modulo 1)},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ est fixé. Au moyen de l'application $\theta \mapsto \exp(2i\pi\theta)$, on peut identifier $\mathbb{T}^1$ avec S^1, le cercle unité du plan complexe : sous cette transformation, l'application T se transporte en la rotation anti-horaire d'angle $2\pi\alpha$.

Il découle de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation que μ est une mesure invariante pour T. Nous allons montrer que T est ergodique pour μ lorsque α est irrationnel.

On note par $\mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues sur $\mathbb{T}^1$ et par $\mathcal{C}^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes deux fois continûment dérivables sur $\mathbb{T}^1$.
Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, on définit $e_j \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}) \subset L^2(\mathbb{T}^1, \mu, \mathbb{C})$ par $e_j(x) = \exp(2i\pi jx)$, où $i \in \mathbb{C}$ est tel que $i^2 = -1$. On tiendra pour admis le fait que la famille $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^1, \mu, \mathbb{C})$.

II.1. Calculer explicitement $S_n(e_j)$.

II.2. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors pour $j \neq 0$, la suite $(S_n(e_j))_{n\in\mathbb{N}_*}$ converge uniformément sur $\mathbb{T}^1$ vers 0. **Dans la suite, nous supposons que** $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

II.3. Montrer que si $f \in \text{sev}\left\langle \{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \right\rangle$ (le sous-espace vectoriel complexe engendré par la famille des e_j) alors

$$S_n(f) \to \int_{\mathbb{T}^1} f \, d\mu \qquad \text{quand } n \to +\infty,$$

uniformément sur $\mathbb{T}^1$.

II.4. Montrer que si $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire si la famille de nombres complexes $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ vérifie $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j| < +\infty$, alors la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e_j$ converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ muni de la distance uniforme.

II.5. Déduire que si $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e_j$ avec $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ alors

$$S_n(f) \to \int_{\mathbb{T}^1} f \, d\mu \qquad \text{quand } n \to +\infty,$$

uniformément sur $\mathbb{T}^1$.

II.6. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{C})$ alors il existe $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ telle que $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e_j$.

II.7. Montrer que quels que soient $0 \leq a < b \leq 1$ et $\varepsilon > 0$, il existe f_b et f_h appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ telles que $f_b \leq \mathbb{I}_{[a,b]} \leq f_h$ sur $\mathbb{T}^1$ et

$$\left(\int_{\mathbb{T}^1} f_h \, d\mu\right) - \varepsilon \leq \int_{\mathbb{T}^1} \mathbb{I}_{[a,b]} \, d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{T}^1} f_b \, d\mu\right) + \varepsilon,$$

où $\mathbb{I}_{[a,b]}$ désigne la fonction indicatrice de $[a, b]$.

II.8. Déduire le théorème d'équirépartition de Weyl : quels que soient $0 \leq a < b \leq 1$

$$\frac{1}{n} \operatorname{card} \left\{ k \in \{0, \cdots, n-1\},\ T^k(x) \in [a,b] \right\} \to (b-a)$$

uniformément sur $\mathbb{T}^1$ quand $n \to +\infty$.

II.9. Par approximation au moyen de fonctions constantes par morceaux, montrer que quelle que soit $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mu, \mathbb{C})$, la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}_*}$ converge dans $L^2(\mathbb{T}^1, \mu, \mathbb{C})$ vers la (classe de la) fonction constante égale à $\int_{\mathbb{T}^1} f\, d\mu$.

II.10. Déduire que T est ergodique pour μ.

Partie III : Existence et singularité mutuelle des mesures invariantes.

Dans cette partie, (X, d) est un espace métrique compact, $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de (X, d) et $T : X \to X$ est une application $\mathcal{B}$-mesurable.

Pour $x_0 \in X$ fixé, on considère la suite $(\mu_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}_*}$ de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}$ définies par

$$\mu_{x_0,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x_0)},$$

où pour $x \in X$, la mesure de Dirac δ_x est telle que $\delta_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ quel que soit $B \in \mathcal{B}$, ou encore, de manière fonctionnelle, telle que

$$\int_X \varphi\, d\delta_x = \varphi(x), \qquad \text{quelle que soit } \varphi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur X. Comme (X, d) est compact et donc séparable, on déduit du théorème de la Vallée-Poussin qu'il existe une sous-suite $(\mu_{x_0,n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\mu_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}_*}$, et une mesure de probabilité $\mu_{x_0,*}$ sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu_{x_0,n_k} \rightharpoonup \mu_{x_0,*}$ quand $k \to +\infty$, au sens où

$$\int_X \varphi\, d\mu_{x_0,n_k} \to \int_X \varphi\, d\mu_{x_0,*}, \quad \text{quand } k \to +\infty, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

III.1. Montrer que pour $\varphi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}_*$,

$$\left|\int_X \varphi\, d\mu_{x_0,n} - \int_X \varphi \circ T\, d\mu_{x_0,n}\right| \leq \frac{2}{n} \max_{x\in X} |\varphi(x)|.$$

III.2. Déduire que $\mu_{x_0,*}$ est une mesure invariante pour T.

Dans de nombreux cas, la mesure $\mu_{x_0,*}$ ainsi obtenue est telle que T est ergodique pour $\mu_{x_0,*}$. Lorsque x_0 est modifié, la mesure $\mu_{x_0,*}$ a priori l'est aussi. Nous allons montrer que deux mesures invariantes rendant le système T ergodique sont soit identiques soit mutuellement singulières.

Dans les quatre questions suivantes, nous supposons donc que μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité sur $\mathcal{B}$ invariantes pour T, et telles que T soit ergodique à la fois pour μ_1 et pour μ_2. Nous supposons que $\mu_1 \neq \mu_2$, et en particulier nous fixons $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$.

III.3. En appliquant le Théorème ergodique de Von Neumann pour $(X, \mathcal{B}, \mu_1, T)$, montrer qu'il existe une application strictement croissante $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_*$ et un ensemble $B_1 \in \mathcal{B}$ tel que $\mu_1(B_1) = 1$ et

$$\left(S_{\phi_1(n)}(\mathbb{I}_A)\right)(x) \to \mu_1(A)$$

quel que soit $x \in B_1$.
(On pourra utiliser le fait qu'une suite convergente dans $L^2(X, \mu_1, \mathbb{R})$ possède une sous-suite qui converge μ_1-presque partout.)

III.4. En appliquant cette fois le Théorème ergodique de Von Neumann pour $(X, \mathcal{B}, \mu_2, T)$, montrer qu'il existe une application strictement croissante $\phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_*$ et un ensemble $B_2 \in \mathcal{B}$ tel que $\mu_2(B_2) = 1$ et

$$\left(S_{\phi_1\circ\phi_2(n)}(\mathbb{I}_A)\right)(x) \to \mu_2(A)$$

quel que soit $x \in B_2$.

III.5. Déduire que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

III.6. Déduire que les mesures μ_1 et μ_2 sont mutuellement singulières (on dit aussi orthogonales), c'est-à-dire qu'il existe $B_* \in \mathcal{B}$ tel que $\mu_1(B_*) = 1$, $\mu_2(B_*) = 0$, et donc aussi $\mu_1(B_*^c) = 0$, $\mu_2(B_*^c) = 1$.

Nous terminons cette partie par une représentation fonctionnelle des mesures ergodiques.

III.7. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ formé par toutes les mesures de probabilités sur $\mathcal{B}$ invariantes pour T est convexe.

III.8. Montrer qu'une mesure $\mu \in \mathcal{C}$ est ergodique pour T si et seulement si elle est un point extrémal de $\mathcal{C}$ (au sens où il n'existe pas deux mesures distinctes μ_g et μ_d de $\mathcal{C}$ et $\lambda \in (0,1)$ tels que $\mu = \lambda\mu_g + (1-\lambda)\mu_d$).

Partie IV : Ergodicité du décalage de Bernoulli.

Dans cette partie $X = \mathbb{T}^1$ est le tore plat en dimension un, correspondant à l'espace métrique quotient de l'intervalle $[0,1]$ (muni de la distance euclidienne) par la relation d'équivalence identifiant ses deux extrémités. La mesure μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$ et la tribu $\mathcal{B}$ est celle des boréliens. L'application T est donnée par

$$T(x) = 2x \quad \text{(modulo 1)}.$$

Du point de vue ensembliste, on peut identifier $\mathbb{T}^1$ avec l'intervalle semi-ouvert $[0,1)$. Tout nombre réel $x \in [0,1)$ s'écrit de manière unique en représentation binaire $x \equiv 0.\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n\cdots$ avec

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j 2^{-(j+1)},$$

où $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne peut pas être stationnaire égale à 1 à partir d'un certain rang. En termes de cette représentation, l'application T correspond au décalage de Bernoulli, qui à une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite translatée $(\alpha_{j+1})_{j\in\mathbb{N}}$.

IV.1. Soit A un sous-ensemble mesurable quelconque de $\mathbb{T}^1 \simeq [0,1)$. Décrire l'ensemble $T^{-1}(A)$ et en déduire que T est mesurable et que la mesure de Lebesgue est invariante pour T.

IV.2. Par une récurrence, déduire ensuite que quel que soit $k \in \mathbb{N}_*$ et $j \in \{0,\cdots,2^k-1\}$,

$$\mu\left(T^{-k}(A) \cap [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k})\right) = 2^{-k}\mu(A).$$

IV.3. Montrer que si A est invariant par T alors quel que soit l'intervalle $I \subset [0,1)$,

$$\mu(A \cap I) = \mu(I)\mu(A).$$

IV.4. Déduire que T est ergodique pour μ.

Le théorème ergodique en moyenne de Von Neumann admet une version renforcée, due à Birkhoff, et qui affirme que la convergence évoquée en I.15 a lieu non seulement dans $L^2(X,\mu,\mathbb{R})$ mais également presque partout pour la mesure μ. En appliquant le théorème de Birkhoff au système ergodique $x \mapsto 2x$ (modulo 1), avec pour fonction f la fonction indicatrice de $[0,\frac{1}{2})$ on obtient alors l'énoncé suivant :

Pour presque tout $x = 0.\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots$ (en représentation binaire) appartenant à $[0,1)$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\mathrm{card}\{0 \leq j \leq k-1 \text{ t.q. } \alpha_j = 0\} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\mathrm{card}\{0 \leq j \leq k-1 \text{ t.q. } \alpha_j = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, pour presque tout $x \in [0,1)$ les zéros et les uns sont distribués asymptotiquement de façon équiprobable dans la représentation binaire de x.

IV.5. Démontrer que quel que soit $p \in [0,1]$ il existe une infinité de nombres réels $x \in [0,1)$ pour lesquels en écrivant $x = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j 2^{-(j+1)}$, $\alpha_j \in \{0,1\}$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\mathrm{card}\{0 \leq j \leq k-1 \text{ t.q. } \alpha_j = 0\} = p.$$

IV.6. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres réels $x \in [0,1)$ pour lesquels la limite évoquée en IV.5 n'existe pas.

Remarquons qu'il n'y a aucune contradiction entre l'énoncé qui les précède et les affirmations contenues dans les points IV.5 et IV.6 : mesure et cardinalité ne font en général pas bon ménage.

Fin du sujet.