Rapport sur l'épreuve de Maths 1 du concours d'entrée en troisième année de l'ENS de Cachan

Commentaire général.

Le problème proposé était un problème d'analyse. Le but était d'aborder la question de la diffusion pour le problème à deux corps de la mécanique classique, c'est-à-dire chercher une asymptotique, lorsque le temps t tend vers $+\infty$, pour les trajectoires $x(t, y, q)$ solutions des équations de Newton,

$$\partial_t^2 x(t, y, q) = \nabla V(x(t, y, q)), \quad \forall t \geq 0,$$

où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un potentiel donné, avec des conditions initiales $(y, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: $x(0, y, q) = y, \quad \partial_t x(0, y, q) = q$.

Les préliminaires servent essentiellement à montrer l'existence des trajectoires (pour tout temps), et leur unicité. La première partie répond au problème de l'asymptotique dans le cas simple où le terme de forces dans les équations de Newton n'est pas donné par un potentiel, mais est de la forme $f(t, x(t, y, q))$, dépendant explicitement du temps, et sous des hypothèses d'intégrabilité en temps. La deuxième partie est consacrée au problème "avec potentiel", *a priori* plus difficile parce que le potentiel V ne dépend pas explicitement du temps, donc n'a pas directement de propriétés d'intégrabilité en temps.

Le correcteur a été plutôt agréablement surpris par l'effort de rédaction d'un grand nombre de candidats, qui ont argumenté leurs réponses dans un langage français et mathématique clair (même si une part également importante des candidats ne voit pas les points difficiles, et s'apesantit sur des réponses qui devraient être plus concises). Pour l'essentiel, les questions abordées ont été celles de la partie "Préliminaires", la partie I et le début de la partie II (jusqu'à la question (5), soit environ un tiers de cette partie). Le barême appliqué a correspondu à : préliminaires, 12 points ; partie I, 6 points ; partie II, 13 points. Les notes obtenues sur ce barême à 31 points ont été conservées pour fournir une note sur 20. La moyenne s'élève alors à 10,12, avec un écart-type de 3,98, une médiane à 10,32, une note maximale à 20 et une note minimale à 1,99.

Remarque : sur 81 candidats inscrits, 71 ont effectivement composé, et les statistiques sont calculées sur ces 71 notes, même si le correcteur considère qu'une demi-douzaine de candidats parmi les présents n'ont pas réellement "participé".

Dans ce qui suit, on détaille ces statistiques pour chaque partie, et on indique quelques éléments de correction pour des questions (dont les numéros sont rappelés en italique) importantes et mal traitées, principalement pour la partie "Préliminaires", variantes sur des questions classiques, nécessitant un peu de soin.

Préliminaires.

La moyenne (sur 12) s'élève à 6,09, avec un écart-type de 2,44, une médiane à 6,52, une note maximale à 11,59 et une note minimale à 0,91.

En dehors de la question (4), qui est un lemme utile pour la partie II, cette partie teste des techniques classiques sur les équations différentielles (EDO). On montre ici l'existence des trajectoires (globales en temps), et leur unicité, c'est-à-dire un théorème de Cauchy-Lipschitz. Un théorème de point fixe adapté à cette situation est donné dans les rappels au début du sujet.

(1)(a) Trop de candidats s'attachent au fait que les fonctions considérées doivent être à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, alors que le point principal est leur continuité, et avant cela, la justification de leur existence, c'est-à-dire l'intégrabilité de $F(\cdot, Z(\cdot))$. Or, $F(\cdot, Z(\cdot))$ est simplement continue par composition de telles fonctions, et $\mathcal{T}_T(Y, Z)$ est alors primitive de fonction continue, donc continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$).

Remarque : ici comme dans la partie I, certains candidats utilisent la théorie de l'intégration de Lebesgue, souvent de façon correcte, même si cela n'est pas nécessaire dans le cas présent (toutes les fonctions à intégrer étant continues, la théorie de Riemann est équivalente).

(1)(b) Trop de candidats éliminent la question de la continuité $Y \mapsto \mathcal{T}_T(Y, Z)$ en invoquant un caractère "affine". Les applications linéaires entre espaces vectoriels normés sont-elles toujours continues ? Ici, il suffit de majorer $\|\mathcal{T}_T(Y, Z) - \mathcal{T}_T(Y', Z)\|_\infty \leq |Y - Y'|$.

(1)(c) L'équivalence entre le fait, pour l'application $t \mapsto Z_T(t, Y)$, d'être continue et point fixe de $\mathcal{T}_T$ d'une part, et d'être de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de l'équation différentielle d'autre part, mérite une justification. L'unique solution (continue) au problème de point fixe fournit bien une application de classe $\mathcal{C}^1$, car primitive de fonction continue. On a alors une solution de l'EDO par dérivation. L'unicité de cette solution vient du fait que, par intégration, cette application continue est point fixe de $\mathcal{T}_T$.

(1)(d) On construit $X(\cdot, Y)$ par récurrence, égale sur chaque intervalle $[kT_0, (k+1)T_0]$ ($k \in \mathbb{N}$) à $Z_{T_0}(kT_0 + \cdot, X(kT_0, Y))$ –l'estimation de contraction nécessaire au théorème de point fixe étant la même sur tous ces intervalles. Les conditions initiales choisies assurent la cohérence de cette définition, et la continuité de $X(\cdot, Y)$. Le fait de satisfaire l'EDO sur chaque intervalle $[kT_0, (k+1)T_0]$ assure le caractère $\mathcal{C}^1$.

(1)(e) Cette question a rarement été bien traitée. Si $X(\cdot, Y)$ et $\tilde{X}(\cdot, Y)$ sont deux solutions différentes de l'EDO ayant la même donnée initiale Y, alors $\underline{t} = \inf\{t \geq 0 \mid X(t, Y) \neq \tilde{X}(t, Y)\}$ existe (ensemble non vide car $X(\cdot, Y) \neq \tilde{X}(\cdot, Y)$, minoré car inclus dans $\mathbb{R}_+$). On a $X(\underline{t}, Y) = \tilde{X}(\underline{t}, Y)$ par continuité (et car $X(0, Y) = \tilde{X}(0, Y)$), et on applique le résultat d'unicité sur $[0, T_0]$ à $X(\cdot + \underline{t}, Y)$ et $\tilde{X}(\cdot + \underline{t}, Y)$, d'où une contradiction.

(2) A nouveau, il y a souvent ici, comme en (1)(c), un manque de rigueur pour le passage d'un problème à un autre. Ainsi, les résultats de (1) permettent de résoudre $\partial_t x(t) = p(t), \quad \partial_t p(t) = f(t, x(t))$ ($\star$) (on montre simplement que $F : (t, x, p) \mapsto (p, f(t, x))$ satisfait l'hypothèse (H)), et on vérifie alors que $\partial_t^2 x(t) = f(t, x(t))$ ($\star\star$). L'unicité se déduit du fait que, si x vérifie ($\star\star$), alors $(x, \partial_t x)$ est solution de ($\star$).

(4) a peu, et souvent mal, été traité. En particulier, l'argument "pour tout $r \geq 0$, la sphère $S_r = \{|x\| = r\}$ est compacte, donc par continuité de V, il existe $x_r \in S_r$ tel que $\inf_{S_r} V = V(x_r)$, puis $r \mapsto x_r$ est continue (!)" a beaucoup été donné. En fait, notant $G(r) = \inf_{S_r} V$, fixant $r_0 \geq 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, par uniforme continuité de V sur la boule fermée (compacte) centrée en 0, de rayon $r_0 + 1$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour $|x|, |x'| \leq r_0 + 1$, $|x - x'| \leq \alpha$ implique $|V(x) - V(x')| \leq \varepsilon$. Alors, pour $0 \leq r, r' \leq r_0 + 1$, avec $x \in S_r$ tel que $G(r) = \inf_{S_r} V = V(x)$, en posant $x' = (r'/r)x$, on a $|x' - x| \leq \alpha$, et on en déduit $V(x') \leq V(x) + \varepsilon = G(r) + \varepsilon$, donc $G(r') \leq G(r) + \varepsilon$; on échange ensuite r et r' pour obtenir $|G(r) - G(r')| \leq \varepsilon$.

Partie I.

La moyenne (sur 6) s'élève à 2,71, avec un écart-type de 1,46, une médiane à 2,9, une note maximale à 5,43 et une note minimale à 0.

On répond ici au problème de l'asymptotique dans le cas où le terme de forces est de la forme $f(t, x(t, y, q))$, avec $t \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(t, x)|$ (puis $t \mapsto (1+t) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(t, x)|$) intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Cette partie ne présentait pas de difficulté majeure. Il est cependant décevant que certains candidats justifient l'existence d'une intégrale telle que $\int_0^\infty f(t', x(t'))\, \mathrm{d}t'$ par le fait que la valeur absolue $|\int_0^t f(t', x(t'))\mathrm{d}\, t'|$ soit majorée uniformément en $t \geq 0$. Le rédacteur du sujet pensait également qu'une question telle que (1)(b) ne poserait pas de problème, évoquant immédiatement la convergence uniforme d'une suite d'applications continues. De même, l'idée pour (1)(d) de convergence "de Cesaro" pour $\frac{1}{t} \int_0^t \partial_t x(t')\mathrm{d}\, t'$ $(t \to +\infty)$ n'est (malheureusement) pas naturelle pour beaucoup de candidats : puisque $\partial_t x(t)$ converge vers p^+ lorsque t tend vers $+\infty$, on attendait un argument simple de "découpe" de l'intégrale.

Partie II.

La moyenne (sur 13) s'élève à 1,33, avec un écart-type de 1,2, une médiane à 1,09, une note maximale à 5,8 et une note minimale à 0.

On arrive ici au problème "avec potentiel". Pour obtenir l'intégrabilité de $t \mapsto \nabla V(t, x(t, y, q))$, on montre d'abord que la trajectoire $x(t)$ "s'échappe vers l'infini" (question (5) : $|x(t)| \geq c_0(t - t_0)$), ce qui permet d'utiliser la décroissance du potentiel à l'infini.

Cette partie est en fait découpée en trois sous-parties, selon le signe de l'énergie $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$ (constante le long de chaque trajectoire) : énergie négative (pour laquelle on montre que les trajectoires sont bornées), positive (pour laquelle on montre tout d'abord que les trajectoires "partent à l'infini", ce qui permet de se ramener au cas avec force dépendant du temps), ou nulle (pour laquelle on montre que les trajectoires s'échappent sous-linéairement en temps).

Cette partie est plus technique, et a relativement (logiquement, au vu de la longueur du sujet) peu été traitée. Nous ferons donc peu de commentaires. Il faut cependant noter que pour un certain nombre de candidats, dans la question (3), le fait de nier qu'une trajectoire $(x(t))_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ soit bornée équivaut à écrire "$|x(t)|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$" (!) Enfin, nous détaillons la question (7), qui a donné lieu à un certain nombre de confusions.

(7)(a) Pour tout $(y, q) \in \mathcal{F}$, on sait par la question (5)(b) que pour tout $t \geq 0$, $|x(t)| \geq c_0(t - t_0)$. Alors $\frac{2|x(t)|}{c_0(t+1)} \geq 2\frac{t - t_0}{t+1}$, quantité supérieure ou égale à 1 si et seulement si $t \geq 2t_0 + 1$.

(7)(b) Par produit et composition, la fonction f_{c_0} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. De plus, comme, pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\theta(\frac{2|x|}{c_0(t+1)}) \in [0, 1]$ s'annule dès que $\frac{2|x|}{c_0(t+1)} \leq 1/2$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_{c_0}(t, x)| \leq \sup_{|x| \geq c_0(t+1)/4} |\nabla V(x)|$. On en déduit que $\int_0^\infty \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_{c_0}(t, x)| \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty \sup_{|x| \geq c_0(t+1)/4} |\nabla V(x)| \mathrm{d}t = \frac{4}{c_0} \int_{c_0/4}^\infty \sup_{|x| \geq r} |\nabla V(x)| \mathrm{d}r$, quantité finie d'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$.

(7)(c) Pour $(y, q) \in \mathcal{F}$ et $t \geq 2t_0 + 1$, on a $p(t) = q - \int_0^{t_0} \nabla V(x(t'))\mathrm{d}t' + \int_{t_0}^t f_{c_0}(t', x(t'))\mathrm{d}t'$. Ainsi, comme t_0 est uniforme en $(y, q) \in \mathcal{F}$, on a pour tous $(y, q) \in \mathcal{F}$ et $t_2 \geq t_1 \geq 2t_0 + 1$: $|p(t_2) - p(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f_{c_0}(t', x(t'))|\mathrm{d}t' \leq \int_{t_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_{c_0}(t, x)|\mathrm{d}t$, qui tend vers zéro lorsque t_1 tend vers l'infini, puisque f_{c_0} vérifie $(\mathbf{H}_1)$. Donc $p(t)$ converge uniformément (en (y, q)) lorsque t tend vers l'infini. On sait par la question (3) des préliminaires que chaque application $p(t)$ est continue sur $\mathcal{F}$, donc on déduit, comme en I(3)(b), que la limite précédente est elle aussi continue.