Sujet 2 – Analyse numérique

Dans ce problème, chaque partie est relativement indépendante. Vous pouvez utiliser les résultats que l'on vous demande de justifier dans une question précédente. On vous demandera d'expliciter des algorithmes, vous indiquerez alors la stratégie que vous utiliseriez pour atteindre l'objectif demandé. On ne vous demande pas d'écrire du code dans un langage informatique.

L'objet de ce sujet est d'étudier la résolution des équations intégrales de seconde espèce:

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{1}$$

Dans cette équation, la fonction φ est l'inconnue alors que le noyau K et le second membre ψ sont des données. Dans une première partie, nous étudierons un opérateur intégral puis nous montrerons que sous certaines hypothèses, l'équation (1) admet une unique solution. Dans les parties suivantes, nous étudierons une méthode de résolution approchée de cette équation.

Définitions et rappels.

Le contenu de cette section pourra être utilisé sans donner de justifications supplémentaires.
Une partie d'un espace normé est relativement compacte si son adhérence est compacte. Soit $\mathcal{C}(-1,1)$ l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)|.$$

Une partie U de $\mathcal{C}(-1,1)$ est dite équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varphi \in U$ et tous $(x,y) \in [-1,1]^2$ avec $|x-y| < \delta$ alors $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Théorème. *(Ascoli) Une partie U de $\mathcal{C}(-1,1)$ est relativement compacte si et seulement elle est bornée et équicontinue.*

La norme d'un opérateur linéaire continu L d'un espace vectoriel normé X dans un espace vectoriel normé Y est

$$\|L\| = \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|Lx\|_Y.$$

L'opérateur L est compact s'il envoie toute partie bornée de X sur une partie relativement compacte de Y. L'opérateur identité de X dans X est compact si et seulement si la dimension de X est finie.

Théorème. *(Alternative de Fredholm) Soit B un espace de Banach et A un opérateur compact de B dans B. Pour tout $y \in B$, l'équation $(I-A)x = y$, a une unique solution $x \in B$ si et seulement si l'équation homogène $(I-A)x = 0$ a uniquement la solution $x = 0$. L'opérateur $I - A$ de B dans B a alors un inverse borné.*

Soit f une fonction régulière sur $[-1,1]$. On pose $x_0 = -1$ et $x_q = 1$ puis on se donne $q-1$ points $x_1 < \cdots < x_{q-1}$ dans $]-1,1[$ et $q+1$ réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_q$. On appelle formule de quadrature I_q sur $[-1,1]$ l'application $\mathcal{C}([-1,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$I_q(f) = \sum_{k=0}^{q} \lambda_k f(x_k).$$

La partie positive d'une fonction f, définie par $(f(x))_+ = \max(0, f(x))$, est notée f_+.

Partie 1. Préliminaires

Soit $K(.,.)$ une fonction continue sur $[-1,1] \times [-1,1]$. On considère l'opérateur A défini par

$$(A\varphi)(x) = \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy$$

1. Montrer que A est un opérateur linéaire et continu sur $\mathcal{C}(-1,1)$.
2. Montrer qu'il existe $x_0 \in [-1,1]$ tel que
$$\int_{-1}^{1} |K(x_0,y)|dy = \sup_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} |K(x,y)|dy.$$
En déduire que
$$\|A\| = \sup_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} |K(x,y)|dy.$$
Indication. On pourra utiliser les fonctions ψ_n définies par
$$\psi_n(y) = \frac{nK(x_0,y)}{n|K(x_0,y)|+1}.$$
3. Soit B une partie bornée de $\mathcal{C}(-1,1)$, montrer que $A(B)$ est une partie équicontinue de $\mathcal{C}(-1,1)$. En déduire que A est un opérateur compact de $\mathcal{C}(-1,1)$ dans $\mathcal{C}(-1,1)$.
4. Montrer que si
$$\sup_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} |K(x,y)|dy < 1,$$
alors l'opérateur $I - A$ est inversible sur $\mathcal{C}(-1,1)$, puis que
$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$
Désormais et pour toute la suite du problème, nous supposerons que K satisfait cette condition.

Partie 2. Etude d'une famille de polynômes

1. Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1-x^2)\ dx$$

On notera $\|P\|$ la norme associée.

2. Construire une suite de polynôme (P_n) telle que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1 telle que

$$i \neq j \implies \int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)(1-x^2)\ dx = 0.$$

Justifier l'unicité d'une telle suite et calculer P_0, P_1, P_2 et leur norme.

3. Montrer que P_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur.

4. En décomposant le polynôme XP_n dans la base des P_k, montrer que les P_k vérifient une relation de récurrence d'ordre deux de la forme

$$P_{n+1} = (X-\alpha_n)P_n - \beta_n P_{n-1}.$$

Expliciter α_n et β_n en fonction de P_n et P_{n-1} puis donner un algorithme de calcul de P_n.

5. Montrer que P_n admet exactement n racines simples situées dans l'intervalle $[-1,1]$.
Indication. On pourra utiliser le polynôme

$$\Pi_n = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}} (X-\alpha)$$

où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des racines de P_n dans $[-1,1]$ de multiplicité impaire.

6. On note $(\omega_k^n)_{k=1..n}$ les n racines de P_n rangées dans l'ordre croissant.

   (a) Montrer qu'une racine ω_k^n de P_n n'est pas racine de P_{n+1}.

   (b) Montrer que pour tout n et pour tous réels x, y, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2} = \frac{1}{\|P_n\|^2}\,\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{(x-y)}.$$

   (c) En déduire que $P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1} > 0$.

   (d) En déduire que $\omega_k^n < \omega_k^{n-1} < \omega_{k+1}^n$.

   (e) Expliciter un algorithme itératif de résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction régulière puis donner un algorithme de calcul des $(\omega_k^n)_{k=1..n}$ qui utilise l'algorithme précédent. On précisera avec soin les paramétres initiaux et les critères d'arrêt utilisés.

Partie 3. Une formule de quadrature

1. On se donne $q-1$ points $-1 < x_1 < \cdots < x_{q-1} < 1$. On rappelle que $x_0 = -1$ et $x_q = 1$. Soit P un polynôme de degré au plus q. Montrer qu'il existe des poids λ_k indépendants de P tels que

$$I_q(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\ dx.$$

Montrer que ces poids peuvent être calculés en résolvant un système linéaire que l'on précisera et pour lequel on justifiera l'existence et l'unicité de la solution.

2. On se place maintenant dans le cas où $x_k = \omega_k^{q-1}$ pour $k \in \{1, \ldots, q-1\}$.

   (a) Montrer qu'il existe des poids λ_k tels que pour tout polynôme P de degré au plus $2q-1$, l'on ait

$$I_q(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\ dx.$$

   Indication. On pourra introduire la division euclidienne de P par $P_k(1-X^2)$, pour k bien choisi.

   (b) Montrer que les poids correspondants λ_k sont positifs.

   (c) Proposer un algorithme de calcul des poids λ_k pour une valeur de q donnée.

3. On suppose, *dans cette question uniquement*, que l'on ne dispose pas des valeurs exactes de la fonction f aux points x_k mais d'approximations numériques $\tilde{f}_k$ correctes à une précision $\varepsilon > 0$ connue. Montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^{q} \lambda_k \tilde{f}_k - I_q(f) \right| \leq 2\varepsilon.$$

4. Pour $q > 1$, on note k_q la fonction

$$k_q(t) = I_q\left((x-t)_+^q\right) - \int_{-1}^{1} (x-t)_+^q\ dx$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2q}([-1,1])$. Montrer que

$$\left| I_q(f) - \int_{-1}^{1} f(x)\ dx \right| \leq \frac{\|f^{(2q)}\|_{\mathrm{L}^\infty(-1,1)}}{(2q)!} \int_{-1}^{1} |k_q(x)|\ dx.$$

5. Soient $a < b$ deux réels. Donner la formule $I_{q,[a,b]}$ associée à I_q quand on travaille sur l'intervalle $[a,b]$ et non plus sur $[-1,1]$. Préciser l'estimation d'erreur correspondante.

6. On subdivise l'intervalle $[-1,1]$ en n intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ de même longueur $2/n$ avec $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_n = 1$. On pose

$$I_q^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{q,[\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(f).$$

(a) Expliciter I_q^n pour $q = 1, 2$. Quelles formules reconnaissez vous ?

(b) Montrer qu'il existe un réel C_q que l'on précisera tel que

$$\left| I_q^n(f) - \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right| \leq \frac{C_q}{n^{2q}}.$$

Partie 4. Une méthode de résolution approchée de (1).

A] Une équation approchée. On se fixe un ordre q de quadrature. Pour un entier n, on écrit la formule de quadrature composée I_q^n définie en 3-6 sous la forme condensée

$$I_q^n(f) = \sum_{i=0}^{q_n} \alpha_i f(x_i).$$

On considère alors l'équation

$$\varphi_n(x) - \sum_{i=0}^{q_n} \alpha_i K(x, x_i) \varphi_n(x_i) = \psi(x), \tag{2}$$

cette équation porte sur la nouvelle variable φ_n.

1. Expliciter q_n.

2. Montrer que les valeurs prises par φ_n aux points x_i de quadrature sont déterminées par un système linéaire que l'on précisera.

3. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_{q_n})$ un vecteur solution du système linéaire précédent. Montrer que la fonction
$$u(x) = \psi(x) + \sum_{i=0}^{q_n} \alpha_i K(x, x_i) u_i,$$
vérifie $u(x_i) = u_i$ pour $i = 1, \ldots, q_n$. En déduire que la fonction u ainsi construite est solution de (2).

4. Etant donnés n, q, K et ψ, donner un algorithme de résolution de (2).

B] Etude de la convergence. Nous allons maintenant montrer que φ_n solution de l'équation (2) converge vers la solution φ de l'équation (1) quand $n \to +\infty$. Pour cela, on introduit l'opérateur A_n défini sur $\mathcal{C}(-1, 1)$ par

$$[A_n u](x) = \sum_{i=0}^{q_n} \alpha_i K(x, x_i) u(x_i).$$

Dans cette définition, x est un réel dans $[-1, 1]$ et u une fonction continue sur $[-1, 1]$. On définit aussi la fonction E_n sur $[-1, 1]^2$ par

$$E_n(x, y) = \int_{-1}^{1} K(x, z) K(z, y)\, dz - \sum_{i=0}^{q_n} \alpha_i K(x, x_i) K(x_i, y).$$

1. Montrer que A_n est un opérateur linéaire continue et compact de $\mathcal{C}(-1,1)$ dans lui-même. En calculer la norme.

2. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $E_n(x,y)$ pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$.

3. Montrer que la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée et équicontinue. En déduire que la convergence précédente est uniforme sur $[-1,1]^2$.

4. Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}(-1,1)$, on a

$$\begin{aligned} \left[(A-A_n)Au\right](x) &= \int_{-1}^{1} E_n(x,y)u(y)\,dy, \\ \left[(A-A_n)A_nu\right](x) &= \sum_{i=0}^{q_n} \alpha_i E_n(x,x_i)u(x_i). \end{aligned}$$

   Donner la norme des opérateurs $(A-A_n)A$ et $(A-A_n)A_n$ et en déduire la limite de ces suites.

5. Montrer que

$$I + (I-A)^{-1}A = (I-A)^{-1},$$

   puis en déduire que

$$\left(I + (I-A)^{-1}A_n\right)(I-A_n) = I - (I-A)^{-1}(A_n - A)A_n.$$

   Montrer que, pour n assez grand, $I - (I-A)^{-1}(A_n-A)A_n$ a un inverse borné.

6. En déduire que $I - A_n$ est injectif puis qu'il a un inverse borné donné par

$$(I-A_n)^{-1} = (I - (I-A)^{-1}(A_n-A)A_n)^{-1}\left(I + (I-A)^{-1}A_n\right).$$

7. Conclure en donnant une majoration de $\|\varphi_n - \varphi\|$.

8. Montrer que, néanmoins, A_n ne converge pas vers A en norme.
   Indication. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on introduira une fonction continue de troncature χ_ε à valeurs dans $[0,1]$. La fonction χ_ε s'annule en chaque point de quadrature et prend la valeur 1 en tout point éloigné d'au moins ε d'un point de quadrature.