ENS CACHAN , CONCOURS D'ADMISSION EN $3^{\text{ème}}$ ANNEE, SESSION 2008.

RAPPORT DE JURY :

CONCERNANT L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1) Quelques éléments statistiques sur les 28 notes :
   Meilleure note : 18,5. Deuxième meilleure note : 15, 25.
   Note la plus faible : 3,75 (deux notes).
   Moyenne : 10,14.
   Ecart type : 3, 57.
   7 notes sont inférieures ou égales à 7.
   14 notes sont inférieures ou égales à 9,5 (médiane).
   21 notes sont inférieures ou égales à 12,75.
   7 notes sont supérieures ou égales à 13,25 (dernier quartile).

2) Commentaires sur les différentes parties :

- Question préliminaire : application de l'inégalité de Doob.
  Cette question, plutôt facile, a été diversement traitée. Ainsi 11 candidats l'ont peu ou mal traitée, tandis que 9 candidats l'ont bien ou très bien traitée. La première inégalité découle facilement de Fubini et de l'inégalité de Doob. Pour obtenir les deux dernières il suffit d'appliquer d'abord Fubini puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- Partie I : inégalité d'Azuma pour les martingales.
  C'est la partie la mieux réussie par les candidats. Les questions qui posent problème sont la question 2 (comparaison, via les séries entières, de cosh(u) et exponentielle($u^2/2$)), et la fin de la question 5, pour montrer la dernière inégalité exponentielle : peu de candidats ont pensé à refaire le raisonnement complet pour les variables initiales multipliées par – 1, pour lesquelles les mêmes bornes restent vraies. En revanche le calcul d'optimisation dit de Cramer-Chernoff (calcul de la meilleure borne exponentielle parmi la famille de bornes obtenues) a été souvent réussi.

- Partie II : inégalité exponentielle de type Azuma pour les sommes de variables bornées dans le cas dépendant, et loi du logarithme itéré.
  Cette partie a été souvent abordée par les candidats, avec des fortunes diverses. Les réponses aux questions 1 et 2 (sans difficulté majeure), ont été souvent partielles ou mal justifiées. La fin de la question 4, où il faut voir comment se ramener à la partie I, a été souvent mal réussie. La question 5, facile (comparaison des bornes obtenues dans le cas des martingales avec celles de la partie I) n'a été correctement traitée que 3 fois. La question 6 (loi du logarithme itéré, version faible), beaucoup plus délicate, a été peu traitée, et jamais complètement. La partie directe du lemme de Borel-Cantelli, qui est l'argument principal pour répondre à cette question, n'a été mentionné que peu de fois.

- Partie III : inégalité exponentielle pour les fonctions de processus linéaires.
  La moitié des candidat s'est arrêtée avant ou au milieu de cette partie. Cette partie, sans difficulté majeure, demandait de la précision dans la rédaction, ce qui a très souvent

fait défaut. Dans la question 1, par exemple, où l'on demandait la convergence de la série dans l'espace des variables presque sûrement bornées muni de sa norme habituelle, la plupart des candidats a montré la convergence presque sûre de la série, puis que la variable limite est bornée presque sûrement., ce qui n'est pas la réponse à la question. La question 3 dont la réponse était délicate à rédiger, n'a jamais été correctement traitée. En revanche, parmi les candidats qui sont arrivés à ce stade, beaucoup ont bien répondu aux questions 5 et 6, qui sont des applications directes de la partie II.

- Partie IV : inégalité exponentielle pour une chaîne de Markov et une transformation uniformément dilatante de l'intervalle [0, 1].
  Seuls 14 candidats ont abordé cette partie, et seulement 5 de façon conséquente. Les questions 1 à 3 ne présentaient pas de difficultés majeures, mais demandaient une bonne connaissance des notions « de niveau M1 » telles que les chaînes de Markov à espace d'états infini, ou l'égalité en loi des processus. Peu de candidats ont répondu correctement et complètement à ces questions. Par exemple, dans la question 1, seuls 3 candidats ont écrit correctement le noyau de transition de la chaîne de Markov. Les questions 4 et 5 étaient les plus difficiles du sujet, car elles faisaient appel de façon non triviale aux trois parties précédentes. Seuls 4 candidats ont abordé la question 4, et 2 seulement ont eu la moitié des points. Seuls 2 candidats ont abordé la question 5, et ont obtenu le quart des points.

3) Conclusion : pour traiter correctement ce sujet, il fallait posséder une bonne compréhension de l'espérance conditionnelle et de ses propriétés, et, pour la partie 4, quelques notions sur les processus (égalité en loi des processus, noyau de transition d'une chaîne de Markov), mais rien qui n'excédait le niveau M1. Parmi les notions de probabilités classiques qui intervenaient, on notera le principe d'optimisation de Cramer-Chernoff pour obtenir des bornes exponentielles (question 5 de la partie I, puis question 4 de la partie II), la partie directe du lemme de Borel-Cantelli (question 6 de la partie II) pour montrer une loi du logarithme itéré (version faible), ainsi que le fait que l'espace des variables presque sûrement bornées muni de sa norme habituelle est complet (question 1 de la partie III) . La principale difficulté du sujet résidait dans l'articulation des parties I et II (qui restent abstraites) avec les parties III et IV, où il fallait voir comment appliquer les résultats généraux, d'abord à une large classe d'exemples (les fonctions de processus linéaires, partie III), puis à une chaîne de Markov particulière (partie IV, question 4) ainsi qu'à une transformation uniformément dilatante de l'intervalle [0, 1] (partie IV, question 5).