Solution abrégée du sujet de Probabilités, Cachan 3A 2008

Avertissement: Je tiens à préciser que je ne suis pas lié à l'École Normale Supérieure de Cachan; par suite les affirmations vraies ou fausses contenues dans ces pages ne sauraient engager l'École.

Olivier Garet, le 22 juillet 2013

Inégalité de Doob et question préliminaire

1. Pour toute variable aléatoire positive X, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{[0,+\infty[} x^2 \; d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,+\infty[} 2u 1\!\!1_{\{u<x\}} d\lambda(u) \right) \; d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,+\infty[} 2u 1\!\!1_{\{u<x\}} d\mathbb{P}_X(x) \right) \; d\lambda(u)(\text{avec Tonelli})\\ &= \int_{[0,+\infty[} 2u\mathbb{P}(X>u) \; d\lambda(u)\end{aligned}$$

Comme ϕ est positive, $U_n(\phi)$ aussi: avec l'inégalité de Doob, on a donc

$$\mathbb{E}(U_n(\phi)^2) = \int_{[0,+\infty[} 2u\mathbb{P}(U_n(\phi)>u) \; du \leq \int_{[0,+\infty[} 2u\frac{1}{u}\mathbb{E}(\phi(S_n) 1\!\!1_{\{U_n(\phi)>u\}}) \; du,$$

ce qui donne la première inégalité. On applique à nouveau le théorème de Tonelli:

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty[} 2\mathbb{E}(\phi(S_n) 1\!\!1_{\{U_n(\phi)>u\}}) \; du &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,+\infty[} 2\phi(S_n) 1\!\!1_{\{U_n(\phi)>u\}} \; d\mathbb{P}(\omega) \right) \; du\\ &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,+\infty[} 2\phi(S_n) 1\!\!1_{\{U_n(\phi)>u\}} \; du \right) \; d\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_{[0,+\infty[} 2\phi(S_n)U_n(\phi) \; d\mathbb{P}(\omega)\\ &= 2\mathbb{E}[\phi(S_n)U_n(\phi)]\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(U_n(\phi)^2) \leq 2\mathbb{E}[\phi(S_n)U_n(\phi)]$.
On en déduit que $\|U_n(\phi) - \phi(S_n)\|_2^2 \leq \|\phi(S_n)\|_2^2$, d'où avec l'inégalité triangulaire

$$\|U_n(\phi)\|_2 \leq \|U_n(\phi) - \phi(S_n)\|_2 + \|\phi(S_n)\|_2 \leq 2\|\phi(S_n)\|_2.$$

En élevant au carré, on obtient l'inégalité voulue.

Partie I

1. $\frac{B-x}{2B}$ et $\frac{B-x}{2B}$ sont positifs, de somme 1. On a la combinaison convexe $\lambda x = \frac{B-x}{2B}(-\lambda B) + \frac{B+x}{2B}(\lambda B)$. Comme la fonction exponentielle est convexe, on en déduit
$$\exp(\lambda x) \leq \frac{B-x}{2B}\exp(-\lambda B) + \frac{x+B}{2B}\exp(\lambda B).$$

2. Cette inégalité peut se réécrire
$$\exp(\lambda x) \leq \cosh(\lambda B) + \frac{x}{B}\sinh(\lambda B).$$
Pour $B = B_i$ et $x = X_i$, on a presque sûrement
$$\exp(\lambda X_i) \leq \cosh(\lambda B_i) + \frac{X_i}{B}\sinh(\lambda B_i),$$
d'où
$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X_i)|\mathcal{F}_{i-1}] \leq \cosh(\lambda B_i) + \frac{\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}]}{B}\sinh(\lambda B_i),$$
avec la convention $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Comme $\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}] = 0$, on a
$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X_i)|\mathcal{F}_{i-1}] \leq \cosh(\lambda B_i)$$
et en réintégrant: $\mathbb{E}[\exp(\lambda X_i)] \leq \cosh(\lambda B_i)$.
On a
$$\cosh(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$
et
$$\exp(\alpha^2/2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}$$
Or pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!} \frac{2 \quad . \; 2 \qquad \ldots \quad 2}{(n+1).(n+2)\ldots(2n)} \leq \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}$$
En sommant les inégalités, on obtient bien que $\cosh(\alpha) \leq \exp \frac{\alpha^2}{2}$, ce qui donne les inégalités voulues

3. On a
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda S_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \exp(\lambda S_{n-1})\mathbb{E}(\exp(\lambda X_n)|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \exp(\lambda S_{n-1})\exp(\lambda^2 B_n^2/2).$$
En réintégrant, on obtient l'inégalité voulue.

4. Soit $\lambda > 0$ On a $\mathbb{P}(M_n > x) = \mathbb{P}(\exp(\lambda M_n) > \exp(\lambda x))$. En appliquant l'inégalité de Doob à $\phi(x) = \exp(\lambda x)$, on obtient

   $$\mathbb{P}(\exp(\lambda M_n) > \exp(\lambda x)) \leq \exp(-\lambda x)\mathbb{E}[\exp(\lambda S_n)1\!\!1_{\{M_n > x\}}] \leq \exp(-\lambda x)\mathbb{E}[\exp(\lambda S_n)).$$

5. Avec 3., on montre facilement par récurrence que $\mathbb{E}(\exp(\lambda S_n)) \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^n B_i^2)$, d'où

   $$\forall \lambda > 0 \quad \mathbb{P}(M_n > x) \leq \exp(-\lambda x + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^n B_i^2).$$

   On optimise en prenant $\lambda = \frac{x}{\sum_{i=1}^n B_i^2}$, ce qui nous donne

   $$\mathbb{P}(M_n > x) \leq \exp(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n B_i^2}).$$

   Par ailleurs

   $$\mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq \mathbb{P}(M_n > x) + \mathbb{P}(\max(-S_1, \ldots, -S_n) > x),$$

   or les $-Y_i$ sont aussi des différences de martingales bornées par les B_i, donc on peut leur appliquer l'inégalité précédente: $\mathbb{P}(\max(-S_1, \ldots, -S_n) > x) \leq \exp(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n B_i^2})$, et enfin

   $$\mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq 2\exp(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n B_i^2}).$$

Partie II

1.
   $$\sum_{i=0}^n P_{k-i}(X_k) = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-i}) - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-i-1}) = \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-n}) = X_k - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-n}).$$

   On a utilisé ici le fait que la somme est télescopique et le fait que X_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable. Le théorème de convergence des martingales, rappelé en introduction, nous donne presque sûrement $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-n}) = \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{-\infty})$. Or, on a supposé $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$, ce qui donne le résultat voulu.

2. Soit $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Avec la question précédente, on a

   $$\begin{aligned} S_\ell = \sum_{k=1}^\ell X_k &= \sum_{k=1}^\ell \sum_{i\geq 0} P_{k-i}(X_k) \\ &= \sum_{i\geq 0} b_i(n) \sum_{k=1}^\ell \frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)} \\ &\leq \sum_{i\geq 0} b_i(n) M_n^{(i)} \end{aligned}$$

(On a simplement inversé une somme finie.) En passant au max, on a l'inégalité

$$M_n \leq \sum_{i \geq 0} b_i(n) M_n^{(i)}.$$

Les b_i sont positifs, de somme 1, donc l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $x \mapsto \exp(\lambda x)$ nous donne

$$\exp(\lambda M_n) \leq \sum_{i \geq 0} b_i(n) \exp(\lambda M_n^{(i)}).$$

On prend l'espérance; on peut intervertir la somme et l'espérance dans le second membre car les quantités sont positives, et on obtient

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n)) \leq \sum_{i \geq 0} b_i(n) \mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})).$$

3. $P_i(X_k)$ est $\mathcal{F}_i$-mesurable et on a $\mathbb{E}[P_i(X_k)|\mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1})] - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$, en particulier $\mathbb{E}[P_{k-i}(X_k)|\mathcal{F}_{(k-i)-1}] = 0$ et $\mathbb{E}[\frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}|\mathcal{F}_{(k-i)-1}] = 0$. Comme $\frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}$ est bien $\mathcal{F}_{k-i}$-mesurable, les $(\frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)})_{1 \leq k \leq n}$ forment une suite finie de différences de martingales, on peut donc leur appliquer l'inégalité de la question préliminaire avec la fonction $\phi(x) = \exp(x/2)$, ce qui donne

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})) = \mathbb{E}(\exp((\lambda M_n^{(i)}/2))^2) \leq 4\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}\right)\right).$$

4. On a montré au cours de la preuve de I.4 que si $Y_1, \ldots, Y_n$ est une suite de différences de martingales avec $|Y_i| \leq B_i$, alors

$$\mathbb{E}\exp(\lambda \sum_{k=1}^{m} Y_k) \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2} \sum_{m=1}^{n} B_i^2).$$

On l'applique ici avec $Y_k = \frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}$ et $B_k = \frac{p_i(n)}{b_i(n)}$: on a

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^2 = n\frac{p_i(n)^2}{b_i(n)^2} = np_i(n)^2 \frac{D_n^2}{p_i(n)^2} = nD_n^2,$$

ce qui, avec la question 3., nous donne

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})) \leq 4\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}\right)\right) \leq 4\exp\left(n\lambda^2 D_n^2/2\right).$$

5. Soit $\lambda > 0$ On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n > x) &= \mathbb{P}(\exp(\lambda M_n) > \exp(\lambda x)) \\
&\leq \exp(-\lambda x)\mathbb{E}\exp(\lambda M_n) \quad \text{(Markov)} \\
&\leq \exp(-\lambda x)\sum_{i\geq 0} b_i(n)\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})) \quad \text{avec II.2} \\
&\leq \exp(-\lambda x)\sum_{i\geq 0} b_i(n) 4\exp\left(n\lambda^2 D_n^2/2\right) \quad \text{avec II.2} \\
&\leq \exp(-\lambda x) 4\exp\left(n\lambda^2 D_n^2/2\right) \quad \text{car } \sum_{i\geq 0} b_i(n) = 1
\end{aligned}$$

On optimise en prenant $\lambda = \frac{x}{nD_n^2}$, et on obtient $\mathbb{P}(M_n > x) \leq 4\exp\left(-\frac{x^2}{2nD_n^2}\right)$. Ensuite, on a $\mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq \mathbb{P}(M_n > x) + \mathbb{P}(\max(-S_1, \ldots, -S_n) > x)$. Les $-X_k$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_k: on a $\mathbb{E}(-X_k|\mathcal{F}_{-\infty}) = -\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ et $\|P_{k-i}(-X_k)\|_\infty = \|-P_{k-i}(X_k)\|_\infty = \|P_{k-i}(X_k)\|_\infty$, donc les D_n sont les mêmes et on peut reporter les estimées:

$$\mathbb{P}(\max(-S_1, \ldots, -S_n) > x) \leq 4\exp\left(-\frac{x^2}{2nD_n^2}\right),$$

et finalement

$$\mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq 8\exp\left(-\frac{x^2}{2nD_n^2}\right).$$

6. On a $P_{k-i}(X_k) = \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-i}) - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-i-1})$. L'hypothèse $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-1} = 0)$ entraîne (la suite des tribus et croissante) que $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-i} = 0)$ pour $i \geq 1$. Ainsi $P_k(X_k) = X_k$ et $P_{k-i}(X_k) = 0$ pour $i \geq 1$. On a donc $p_0(n) = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \|X_k\|_\infty$ et $p_i(n) = 0$ pour $i \geq 1$. Ainsi $D_n^2 = p_0(n)^2 = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \|X_k\|_\infty^2$. Mais

$$n \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \|X_k\|_\infty^2 \geq \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}} \|X_k\|_\infty^2,$$

donc on a une majoration moins bonne que dans l'inégalité d'Azuma (même sans tenir compte du facteur 4).

7. Avec 5., on obtient

$$\mathbb{P}(\overline{M}_{[a^N]} > \sqrt{(2D^2+\varepsilon)[a^N]\ln(N)}) \leq 8\exp\left(-\frac{2D^2+\varepsilon}{2D^2}\ln N\right) = \frac{8}{N^{1+\frac{\varepsilon}{2D^2}}}.$$

Cette série est convergente, donc d'après le premier lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, pour N assez grand, on a $\overline{M}_{[a^N]} \leq \sqrt{(2D^2+\varepsilon)[a^N]\ln(N)}$, ce qui entraîne que

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{\overline{M}_{[a^N]}}{\sqrt{2[a^N](\ln N)}} \leq \sqrt{D^2+\varepsilon/2} \quad \text{p.s.}$$

Notons $N = N(n)$ le plus petit entier tel que $a^N > n$. On a $n \geq a^{N-1} = a^N/a \geq [a^N]/a$ et $\ln n \geq (N(n)-1)\log a$, d'où l'inégalité

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq \frac{\overline{M}_{[a^N]}}{\sqrt{2[a^N]/a((\ln(N-1)+\ln\ln a))}}.$$

Comme $\ln(N-1)+\ln\ln a \sim \ln(N-1) = \ln N + \ln(1-1/N) \sim \ln N$, on en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq \limsup_{N\to+\infty} \frac{\overline{M}_{[a^N]}}{\sqrt{2[a^N]/a(\ln N)}} \leq \sqrt{a}\limsup_{N\to+\infty} \frac{\overline{M}_{[a^N]}}{\sqrt{2[a^N](\ln N)}}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq \sqrt{a}\sqrt{D^2+\varepsilon/2} \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, en prenant pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = 2/k$ et $a = 1+1/k$, on a $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$ où $\Omega_k = \{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq \sqrt{1+1/k}\sqrt{D^2+1/k}\}$. Une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 est de probabilité 1. Comme

$$\bigcap_{k\geq 1} \Omega_k = \{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq D\},$$

on a le résultat voulu.

Partie III

1. $\mathbb{L}^\infty$ est complet, de sorte que les séries normalement convergentes y convergent. Or $\|a_j\varepsilon_{k-j}\|_\infty = |a_j|\|\varepsilon_{k-j}\|_\infty = |a_j|\|\varepsilon_0\|_\infty$ car les ε_i sont identiquement distribuées. Comme $\sum_j |a_j| < +\infty$, la série converge bien dans $\mathbb{L}^\infty$, et on a pour tout k:

$$\|Y_k\|_\infty \leq \|\varepsilon_0\|_\infty \sum_{j\geq 0} |a_j|.$$

Si on pose $C = \sup\{f(x); x \in [-\varepsilon_0\|_\infty \sum_{j\geq 0}|a_j|, \varepsilon_0\|_\infty \sum_{j\geq 0}|a_j|]$, on a aisément $|f(Y_k)| \leq 2C$ presque sûrement, soit $Y_k \in \mathbb{L}^\infty$ et $\|Y_k\|_\infty \leq 2C$. On a presque sûrement $Y_k \leq \max(0,Y_k) \leq \|\max(0,Y_k)\|_\infty$ et $-Y_k \leq \max(0,-Y_k) \leq \|\max(0,-Y_k)\|_\infty = \|-\min(0,Y_k)\|_\infty = \|-\min(0,Y_k)\|_\infty$, donc presque sûrement, Y_k est à valeurs dans $[-\|\min(0,Y_k)\|_\infty, \|\max(0,Y_k)\|_\infty]$. Pour conclure, il suffit de montrer que Y_0 et Y_k ont même loi: cela entrainera que $\min(0,Y_k)$ et $\min(0,Y_0)$ (resp. $\max(0,Y_k)$ et $\max(0,Y_0)$) ont même loi. Or, par construction, la loi de Y_k est la loi image de $\mathbb{P}_{\varepsilon_0}^{\otimes\mathbb{N}}$ par $(x_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{j\geq 0} a_j x_k$, ce qui donne le résultat voulu.

2. La converge dans $\mathbb{L}^\infty$ entraîne la convergence presque sûre: on a

$$Y_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j\varepsilon_{k-j} \quad p.s.$$

Or $\sum_{j=0}^{n} a_j \varepsilon_{k-j}$ et $\mathcal{F}_k$-mesurable et la convergence presque sûre préserve la mesurabilité: Y_k est donc $\mathcal{F}_k$-mesurable, et par suite, X_k également. D'après la loi du 0–1, $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale, donc $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{-\infty}) = \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}f(Y_k) - \mathbb{E}f(Y_k) = 0$.

3. Posons

$$V_1 = \sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon_{k-j} \quad V_2 = \sum_{j=i}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}$$

et

$$V_1' = \sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon'_{k-j} \quad V_2' = \sum_{j=i}^{+\infty} a_j \varepsilon'_{k-j}$$

Comme V_1 est indépendant de $\mathcal{F}_{k-i}$ et V_2 est $\mathcal{F}_{k-i}$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}[f(V_1+V_2)|\mathcal{F}_{k-i}] = g(V_2), \text{ avec } g(x) = \mathbb{E}[f(V_1+x)].$$

De la même manière, V_1' est indépendant de $\mathcal{F}_{k-i}$ et V_2 est $\mathcal{F}_{k-i}$-mesurable, donc

$$\mathbb{E}[f(V_1'+V_2)|\mathcal{F}_{k-i}] = g(V_2), \text{ avec } h(x) = \mathbb{E}[f(V_1'+x)].$$

Mais V_1 et V_1' ont même loi, donc $g = h$, ce qui nous donne

$$\mathbb{E}[f(V_1+V_2)|\mathcal{F}_{k-i}] = \mathbb{E}[f(V_1'+V_2)|\mathcal{F}_{k-i}].$$

La tribu $\mathcal{A} = \sigma(\varepsilon_\ell, \ell > k-i)$ est indépendante de $\mathcal{F}_{k-i}$ et de $f(V_1'+V_2)$ (qui est $\sigma((\varepsilon_{ell})_{\ell \le k-i}, (\varepsilon'_{ell}))$-mesurable), donc

$$\mathbb{E}[f(V_1'+V_2)|\mathcal{F}_{k-i}] = \mathbb{E}[f(V_1'+V_2)|\sigma(\mathcal{F}_{k-i},\mathcal{A})] = \mathbb{E}[f(V_1'+V_2)|\mathcal{F}_\infty].$$

Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-i}] &= \mathbb{E}[f(V_1+V_2)|\mathcal{F}_{k-i}] = \mathbb{E}[f(V_1'+V_2)|\mathcal{F}_\infty] \\ &= \mathbb{E}_\varepsilon\left[f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon'_{k-j} + \sum_{j=i}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}\right)\right].\end{aligned}$$

Et de même

$$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-(i+1)}] = \mathbb{E}_\varepsilon\left[f\left(\sum_{j=0}^{i} a_j \varepsilon'_{k-j} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}\right)\right]$$

En faisant la différence, on obtient l'expression demandée.

4. Supposons que f vérifie $H(\alpha, I(Y))$. La régularité Hölder donne

$$\left|\begin{array}{c} f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon'_{k-j} + a_i \varepsilon_{k-i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}\right) \\ -f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon'_{k-j} + a_i \varepsilon'_{k-i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}\right) \end{array}\right| \le C(f,\alpha)|a_i|^\alpha |\varepsilon_{k-i} - \varepsilon'_{k-i}|^\alpha,$$

d'où

$$\left\| \begin{array}{c} f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j\varepsilon'_{k-j} + a_i\varepsilon_{k-i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j\varepsilon_{k-j}\right) \\ -f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j\varepsilon'_{k-j} + a_i\varepsilon'_{k-i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j\varepsilon_{k-j}\right) \end{array} \right\|_\infty \leq C(f,\alpha)|a_i|^\alpha\|\varepsilon_{k-i}-\varepsilon'_{k-i}\|_\infty^\alpha,$$

Comme l'espérance conditionnelle est une contraction de $\mathbb{L}^\infty$, avec la question précédente, on obtient

$$\|P_{k-i}(X_k)\|_\infty \leq C(f,\alpha)|a_i|^\alpha\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty^\alpha.$$

5. On remarque que le majorant ne dépend pas de k:
on en déduit $p_i(n) \leq C(f,\alpha)|a_i|^\alpha\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty^\alpha$. D_n est fini dès que la série de terme général $|a_i|^\alpha$ converge, et on a alors

$$D_n \leq C(f,\alpha)\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty^\alpha \sum_{i\geq 0}|a_i|^\alpha$$

et

$$D \leq C(f,\alpha)\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty^\alpha \sum_{i\geq 0}|a_i|^\alpha.$$

6. De la même manière, on va avoir

$$D \leq C(f,1)\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty \sum_{i\geq 0}|a_i|,$$

d'où avec II.7

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq C(f,1)\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty \sum_{i\geq 0}|a_i|.$$

Partie IV

1. On a $2^k Z_k = 2^{k-1}Z_{k-1} + 2^{k-1}\varepsilon_k$. D'où

$$2^k Z_k - 2^0 Z_0 = \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+1}Z_{i+1} - 2^i Z_i = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i\varepsilon_{i+1}$$

et

$$Z_k = 2^{-k}Z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i-k}\varepsilon_{i+1}.$$

Ainsi $\sigma(Z_0,\dots,Z_{k-1})$ est une sous-tribu de $\sigma(Z_0,\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_k)$, qui est indépendante de ε_k, car les tribus $\sigma(\varepsilon_k), \sigma(\varepsilon_j, j<k)$ et $\sigma(Z_0)$ sont indépendantes. Comme le vecteur $\overline{Z} = (Z_0,\dots Z_{k-1})$ est indépendant de ε_k et que $g(Z_k)$

s'écrit $g(Z_k) = F(\overline{Z}, \varepsilon_k)$, avec $F(\overline{z}, e) = g(\overline{z}_1 + e)$, on a on a $\mathbb{E}[g(Z_k)|\overline{Z}] = g(\overline{Z})$ avec $g(\overline{z}) = \mathbb{E}[F(\overline{z}, \varepsilon_k)]$. Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E}[g(Z_k)|Z_0, \dots Z_{k-1}] = \frac{1}{2}\left(g(\frac{Z_{k-1}}{2}) + g(\frac{Z_{k-1}+1}{2})\right) = \int g(y)\, dK(Z_{k-1}, \cdot),$$

avec $K(x, \cdot) = \frac{1}{2}\delta x/2 + \frac{1}{2}\delta(x+1)/2$. Ceci montre que (Z_k) est une chaîne de Markov homogène.

2. Comme Z_{k-1} est indépendante de ε_k, $\mathbb{P}_{Z_k}$ est l'image de $\mathbb{P}_{Z_{k-1}}$ par l'application qui à μ associe la mesure image de $\mu \otimes \varepsilon_1$ par $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}$. Montrons que cette transformation laisse $U[0,1]$ invariante: si $Z_0 \sim U[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Z_1)] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}(f(Z_0/2) + \mathbb{E}((Z_0+1)/2) = \frac{1}{2}(\int_0^1 g(x/2)\ dx + \int_0^1 g((x+1)/2)\ dx \\ &= \frac{1}{2}(2\int_0^{1/2} g(x)\ dx + 2\int_{1/2}^1 g(x)\ dx) = \int_0^1 g(x)\ dx = \mathbb{E}[g(Z_0)]\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, on a $\mathbb{P}_{Z_k} = U[0,1]$ pour tout $k \geq 0$. Mais

$$Z_k = 2^{-k} Z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-(i+1)} \varepsilon_{(k-1)-i}$$

et a même loi que

$$Z'_k = 2^{-k} Z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-(i+1)} \varepsilon_{-i}$$

puisque tous deux ont comme loi la loi image de $U[0,1] \otimes \mathrm{Ber}(1/2)^{\otimes k-i+1}$ par $(z, e_0, \dots, e_{k-i}) \mapsto 2^{-k}z + \sum_{i=0}^{k-i} 2^{-(i+1)} e_i$. Or Z'_k converge presque sûrement vers $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)}\varepsilon_{-i}$ et la convergence presque sûre entraîne la convergence en loi, donc la loi de $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)}\varepsilon_{-i}$ suit la loi $U[0,1]$.

3. On a

$$\begin{aligned}2Y_k &= \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i}\varepsilon_{k-i} \\ &= \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i}\varepsilon_{k-i} = \varepsilon_k + \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)}\varepsilon_{k-1-i} \\ &= \varepsilon_k + Y_{k-1},\end{aligned}$$

ce qui donne la récurrence voulue. Y_k est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{i=0}^{n} 2^{-(i+1)}\varepsilon_{k-i}$ qui a même loi que $\sum_{i=0}^{n} 2^{-(i+1)}\varepsilon_{-i}$, donc Y_k a loi de la limite de $\sum_{i=0}^{n} 2^{-(i+1)}\varepsilon_{-i}$, c'est à dire Y_0, qui suit $U[0,1]$ comme démontré à la question précédente.

4. Comme Z_k prend ses valeurs dans $[0,1]$, on est dans le cadre de l'application de la partie III, avec $a_k = 2^{-(k+1)}$. Comme remarqué en III.5, comme la série des $|a_k|^\alpha$ converge, on peut appliquer les résultats de la partie II, en particulier II.5, avec

$$D_n \leq C(f,\alpha)\|\varepsilon_0 - \varepsilon_0'\|_\infty^\alpha \sum_{i\geq 0} |a_i|^\alpha = C(f,\alpha)\sum_{i\geq 0}|a_i|^\alpha$$

Si $f(x) = g(x^\alpha)$, pour une fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|g(x) - g(y)| \leq |x-y|$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |g(x^\alpha) - g(y^\alpha)| \leq |x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha.$$

Pour avoir cette dernière inégalité, il suffit de vérifier que si a et $a+h$ sont dans $[0,1]$, on a $(a+h)^\alpha \leq a^\alpha + h^\alpha$, ou encore $(\frac{a}{a+h})^\alpha + (\frac{h}{a+h})^\alpha \geq 1$. Un simple calcul de dérivée montre que $\phi(x) = x^\alpha + (1-x)^\alpha$ est croissante sur $[0,1/2]$, d'écroissante sur $[1/2,1]$, et atteint son minimum en 0 et en 1 qui vaut 1. On peut donc majorer $C(f,\alpha)$ par 1. La borne est donc $\sum_{i\geq 0}|a_i|^\alpha$ que l'on peut calculer explicitement (série géométrique): c'est $\frac{2^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}}$ Lorsque α tend vers 0, on a

$$\frac{2^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \sim \frac{1}{1-2^{-\alpha}} = \frac{1}{1-\exp(-\alpha\ln 2)} \sim \frac{1}{\alpha\ln 2}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (g\circ T)(x)h(x)\ dx &= \int_0^{1/2} g(2x)h(x)\ dx + \int_{1/2}^1 g(2x-1)h(x)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)h(x/2)\ dx + \frac{1}{2}g(x)h((x+1)/2)\ dx \\
&= \int_0^1 g(x)(h(x/2) + h((x+1)/2))/2\ dx \\
&= \int_0^1 g(x)\left(\int_0^1 h(y)K(x,\ dy)\right)\ dx
\end{aligned}$$

En particulier, en prenant $h=1$, on obtient $\int_0^1 (g\circ T)(x)\ d\lambda(x) = \int_0^1 g(x)\ d\lambda(x)$ pour tout g, ce qui montre que T préserve λ. Si l'on note $Tg(x) = g(T(x))$ et $(Kg)(x) = \frac{1}{2}(g(x/2) + g((x+1)/2)$, on vient de montrer l'équation de retournement

$$\int_0^1 (Tg)f\ d\lambda = \int_0^1 g(Kf)\ d\lambda.$$

Notons que comme $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$, $(T^n(x))_{n\geq 0}$ et T est l'opérateur de transition associé. Quelles que soient les fonctions mesurables f et g, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Z_k)g(Z_{k+1})] &= \mathbb{E}[f(Z_k)Kg(Z_k)] \\
&= \int_0^1 f(x)Kg(x)\ d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 Tf(x)g(x)\ d\lambda(x) \\
&= \mathbb{E}[Tf(Z_{k+1})g(Z_{k+1})]
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne $\mathbb{E}[f(Z_k)|Z_{k+1}] = Tf(Z_{k+1})$. Soit $n > k$ Comme $\varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendants de $\sigma(f(Z_k), Z_{k+1})$, on a $\mathbb{E}[f(Z_k)|Z_{k+1}] = \mathbb{E}[f(Z_k)|Z_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_n]$. Mais $\sigma(Z_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_n) = \sigma(Z_{k+1}, Z_{k+2}, \dots, Z_n)$, donc on obtient

$$\mathbb{E}[f(Z_k)|Z_{k+1}, \dots Z_n] = \mathbb{E}[f(Z_k)|Z_{k+1}] = Tf(Z_{k+1}).$$

Si pour $0 \leq k \leq n$, on pose $Z'_k = Z_{n-k}$, on a donc

$$\mathbb{E}[f(Z'_{k+1})|Z'_k, \dots Z'_0] = Tf(Z'),$$

ce qui montre que $(Z'_k)_{0 \leq k \leq n})$ est une chaîne de Markov qui a le même opérateur de transition que $(T^n(x))_{n \geq 0}$. Comme la loi initiale est la même, on a l'égalité en loi entre $(Z'_0, \dots Z'_n)$ et $(x, T(x), \dots, T^n(x)$, soit donc entre (Z_n, Z_{n-1}, Z_0) et $(x, T(x), \dots T^n(x))$. En particulier $(Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_1)$ a même loi que $(x, T(x), \dots T^{n-1}(x))$, qui a même toi que $(T(x), T(x), \dots T^n(x))$ car la mesure de Lebesgue est invariante par T.
La loi de $\sum_{k=1}^n \left(f \circ T^k - \int_0^1 f(t)\ dt\right)$ est la loi image de $\lambda_{(T,T^2,\dots T^n}$ par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - \int_0^1 f(t)\ dt\right)$. C'est donc aussi la loi image de $\mathbb{P}_{(Z_n,\dots,Z_{n-1})}$ par la même application, soit donc la loi de

$$\sum_{k=1}^n \left(f(Z_{n+1-k}) - \int_0^1 f(t)\ dt\right) = \sum_{k=1}^n \left(f(Z_k) - \int_0^1 f(t)\ dt\right).$$

Avec les notations précédentes, on a

$$|\sum_{k=1}^n \left(f(Z_k) - \int_0^1 f(t)\ dt\right)| = |S_n| \leq \overline{M}_n.$$

On peut ici appliquer la question 4, et on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > x) \leq P(\overline{M}_n > x) \leq 8 \exp\left(-\frac{x^2}{2nD^2}\right),$$

où D est la constante déterminée à la question 4.

FIN