Sujet de Probabilités, Cachan 3A 2008

Le sujet comporte 6 pages. [1]

- Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, et on note $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
- On note $\mathbb{L}^1$ l'ensemble des variables aléatoires réelles X telles que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.
- On note $\mathbb{L}^\infty$ l'ensemble des variables aléatoires réelles X telles que X est borné presque sûrement, et on note

$$\|X\|_\infty = \inf\{M > 0 \text{ tels que } \mathbb{P}(|X| > M) = 0\}.$$

- Si $(\varepsilon_i)_{i\in T}$ est une famille de variables aléatoires, on note $\sigma(e_i, i \in T)$ la tribu engendrée par $(\varepsilon_i)_{i\in T}$, c'est à dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ qui rend mesurable les variables aléatoires ε_i pour tout i appartenant à T.
- Si X appartient à $\mathbb{L}^1$, et si $\mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on note $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}$.
- Si $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_i$.

Dans tout le sujet, $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles.
Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad M_n = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} S_k \text{ et } \overline{M}_n = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |S_k|.$$

Le but des parties I et II est d'établir des bornes exponentielles pour les quantités $\mathbb{P}(M_n) > x$ et $\mathbb{P}(\overline{M}_n) > x$ lorsque les variables sont bornées et d'espérances nulles, sous des conditions raisonnables. Dans les parties III et IV, on donne des exemples pour lesquels ces conditions sont vérifiées. Ces quatre parties ne sont donc pas indépendantes.

Rappels.

On rappelle trois propriétés qui seront utiles pour la suite.

1. Un cas particulier de l'inégalité de Jensen. Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{i\geq 0} b_i = 1$, et φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Si les séries $\sum_{i\geq 0} b_i u_i$ et $\sum_{i\geq 0} b_i \varphi(u_i)$ convergent, alors

$$\varphi\left(\sum_{i\geq 0} b_i u_i\right) \leq \sum_{i\geq 0} b_i \varphi(u_i).$$

2. Si $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, alors pour toute variable X dans $\mathbb{L}_1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{-n}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{-\infty}) \text{ presque sûrement.}$$

1. Attention, le sujet a été retapé par mes soins car la version originale posait parfois des problèmes de fonte. Pour la retrouver, voir
http ://www.iecn.u-nancy.fr/~garet/annales-cachan/cachan2008_IIA-orig.pdf

3. Loi du 0–1 : si $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, et si $\mathcal{F}_i = \sigma(\varepsilon_j, j \leq i)$, alors $\mathcal{F}_{-\infty}$ est $\mathbb{P}$-triviale, c'est à dire que si $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$, alors $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

Définition.

Soient $X_1, X_2, \dots X_n$ des variables aléatoires appartenant à $\mathbb{L}^1$. On dit que les variables $X_1, X_2, \dots X_n$ sont des différences de martingales associées à la famille croissante $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, si

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est $\mathcal{G}_i$-mesurable.
2. $\mathbb{E}(X_1) = 0$, et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $\mathbb{E}(X_i|\mathcal{G}_{i-1}) = 0$ presque sûrement.

Inégalité de Doob et question préliminaire

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des différences de martingales, et φ une fonction convexe. Notons

$$U_n(\varphi) = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} \varphi(S_k) \text{ et } \varphi(S_n)_+ = \max(0, \varphi(S_n)).$$

On rappelle l'inégalité de Doob : Pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(U_n(\varphi) > x) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}(\varphi(S_n)_+ \mathbb{1}_{\{U_n(\varphi)>x\}}).$$

1. Montrer que si φ est une fonction convexe positive,

$$\mathbb{E}(U_n(\varphi)^2) \leq 2\int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\varphi(S_n)\mathbb{1}_{\{U_n(\varphi)>x\}})\, dx.$$

En déduire que

$$\mathbb{E}(U_n(\varphi)^2) \leq 2\mathbb{E}(\varphi(S_n)U_n(\varphi)), \text{ puis que } \mathbb{E}(U_n(\varphi)^2) \leq 4\mathbb{E}(\varphi(S_n)^2).$$

Partie I

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des différences de martingales associées à la famille croissante $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ (voir la définition plus haut) telles que

$$\|X_i\|_\infty \leq B_i < +\infty \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

1. Pour tout $B > 0$, tout $x \in [-B, B]$, et tout réel λ, établir l'inégalité

$$\exp(\lambda x) \leq \frac{B-x}{2B}\exp(-\lambda B) + \frac{x+B}{2B}\exp(\lambda B).$$

2. On rappelle que $2\cosh(u) = \exp(u) + \exp(-u)$. Déduire de la question précédente que
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda X_1)) \leq \cosh(\lambda B_1) \leq \exp(\lambda^2 B_1^2/2),$$
et que, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$,
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda X_i)|\mathcal{F}_{i-1}) \leq \cosh(\lambda B_1) \leq \exp(\lambda^2 B_1^2/2) \text{ presque sûrement.}$$

3. Pour tout réel λ, montrer que
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda S_n)) \leq \exp(\lambda^2 B_n^2/2)\mathbb{E}(\exp(\lambda S_{n-1})).$$

4. Pour tout $\lambda > 0$ et $x > 0$, montrer que
$$\mathbb{P}(M_n > x) \leq \mathbb{E}(\exp(\lambda S_n - \lambda x)).$$

5. En déduire les inégalités d'Azuma : pour tout $x > 0$,
$$\mathbb{P}(M_n > x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n B_i^2}\right) \text{ et } \mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n B_i^2}\right).$$

Partie II

Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathbb{L}^\infty$. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Pour tout entier strictement positif k, on suppose que X_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable, et que $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ presque sûrement.

1. On note $P_i(X_k) = \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{i-1})$. Pour tout entier strictement positif k, montrer que
$$X_k = \sum_{i\geq 0} P_{k-i}(X_k) \text{ presque sûrement.}$$

2. Pour tout entier naturel i et tout entier strictement positif n, on note
$$p_i(n) = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \|P_{k-i}(X_k)\|_\infty.$$
On suppose dans le reste de cette partie que $D_n = \sum_{i\geq 0} p_i(n) < +\infty$. On pose $b_i(n) = p_i(n)/D_n$. Montrer que
$$M_n \leq \sum_{i\geq 0} b_i(n) M_n^{(i)}, \text{ avec } M_n^{(i)} = \max_{m\in\{1,\ldots,n\}} \left(\sum_{k=1}^m \frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}\right).$$
En déduire que, pour tout $\lambda > 0$,
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n)) \leq \sum_{i\geq 0} b_i(n)\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})).$$

3. Calculer $\mathbb{E}(P_{k-i}(X_k)|\mathcal{F}_{k-i-1})$. En appliquant la dernière inégalité de la question préliminaire, montrer que, pour tout réel λ et tout entier naturel i,

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})) = \mathbb{E}(\exp((\lambda M_n^{(i)}/2))^2) \leq 4\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{k-i}(X_k)}{b_i(n)}\right)\right).$$

4. En utilisant la majoration précédente ainsi que la question 3 de la partie I, montrer que pour tout réel λ et tout entier naturel i,

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda M_n^{(i)})) \leq 4\exp(n\lambda^2 D_n^2/2).$$

5. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n > x) \leq 4\exp\left(-\frac{x^2}{2nD_n^2}\right) \text{ et } \mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq 8\exp\left(-\frac{x^2}{2nD_n^2}\right).$$

6. On suppose de plus que, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Comparer les bornes de la question précédente avec celles obtenues dans la question 5 de la partie I.
7. On suppose que $D = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n < +\infty$. On note $[x]$ la partie entière d'un réel positif x. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a > 1$,

$$\sum_{N>1} \mathbb{P}(\overline{M}_{[a^N]} > \sqrt{(2D^2+\varepsilon)[a^N]\ln(N)}) < +\infty.$$

   En déduire une loi du logarithme itéré bornée :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \leq D \text{ presque sûrement.}$$

Partie III

Soient $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées appartenant à $\mathbb{L}^\infty$. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $\sum_{i\geq 0}|a_i| < +\infty$. Pour tout entier naturel k, on définit

$$Y_k = \sum_{j\geq 0} a_j\varepsilon_{k-j} \text{ et pour } f \text{ continue }, \quad X_k = f(Y_k) - \mathbb{E}(f(Y_k)).$$

1. Montrer que la série définissant Y_k converge dans $\mathbb{L}^\infty$, de sorte que Y_k et X_k sont bien définies et appartiennent à $\mathbb{L}^\infty$. Montrer que les variables aléatoires Y_k sont équidistribuées. On note

$$I(Y) = [-\|\min(0, Y_0)\|_\infty, \|\max(0, Y_0)\|_\infty].$$

   Montrer que presque sûrement Y_k est à valeurs dans l'intervalle $I(Y)$.

2. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit $\mathcal{F}_i = \sigma(\varepsilon_j, j \leq i)$. Montrer que X_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable puis que $\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ presque sûrement. On peut donc appliquer les résultats de la partie II.
3. On reprend les notations de la partie II, et on cherche à majorer $\|P_{k-i}(X_k)\|_\infty$. Soit $(\varepsilon'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires de même loi que $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et indépendante de $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. On note $\mathbb{E}_\varepsilon$ l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z})$: $\mathbb{E}_\varepsilon(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_\infty)$. Montrer que, presque sûrement,
$$P_{k-i}(X_k) = \mathbb{E}_\varepsilon \left(\begin{array}{c} f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon'_{k-j} + a_i \varepsilon_{k-i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}\right) \\ -f\left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \varepsilon'_{k-j} + a_i \varepsilon'_{k-i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j \varepsilon_{k-j}\right) \end{array} \right).$$
4. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est α-höldérienne pour un $\alpha \in]0,1[$, si la propriété $H(\alpha, I)$ a lieu
$$H(\alpha, I): \quad |f(x)-f(y)| \leq C(f,\alpha)|x-y|^\alpha \text{ pour } C(f,\alpha) < +\infty \text{ et tout } (x,y) \text{ dans } I\times I.$$
Montrer que si f vérifie $H(\alpha, I(Y))$ pour un $\alpha \in]0,1[$, alors
$$\|P_{k-i}(X_k)\|_\infty \leq C(f,\alpha)|a_i|^\alpha \|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_\infty^\alpha.$$
5. On suppose que f vérifie $H(\alpha, I(Y))$ pour un $\alpha \in]0,1[$. Donner une condition sur la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour que les bornes de la question 4, partie II, aient lieu. On donnera un majorant de la constante D_n, puis de la constante D.
6. On suppose que f vérifie $H(1, I(Y))$. Que peut-on dire de
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} \quad ?$$

Partie IV

Soient $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = 1/2$. Soit Z_0 une variable aléatoire réelle indépendante de $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Pour tout entier strictement positif k, on définit les variables Z_k grâce à la relation dite auto-régressive
$$(AR): \quad Z_k = \frac{1}{2}(Z_{k-1} + \varepsilon_k).$$

1. Montrer que ε_k est indépendante de $(Z_0, \ldots, Z_{k-1})$. Pour toute fonction borélienne bornée g, en déduire $\mathbb{E}(g(Z_k)|\sigma(Z_0,\ldots,Z_{k-1}))$ en fonction de Z_{k-1}. Montrer que $(Z_k)_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène, dont on décrira le noyau de transition $K(x,\cdot)$, c'est à dire la famille de mesures $\{K(x,\cdot), x \in \mathbb{R}\}$ telles que, pour toute fonction borélienne bornée g,
$$\mathbb{E}(g(Z_k)|\sigma(Z_0,\ldots,Z_{k-1})) = \int g(y)K(Z_{k-1},\ dy) \text{ presque sûrement.}$$

2. On suppose que Z_0 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de Z_k ? Écrire Z_k en fonction de Z_0 et de $\sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i-1}\varepsilon_{k-i}$. En déduire que $\sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i-1}\varepsilon_{k-i}$ converge en loi lorsque k tend vers l'infini vers la loi uniforme sur $[0,1]$. En déduire la loi de $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i-1}\varepsilon_{-i}$.
3. Comme dans la partie III, on définit

$$Y_k = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i-1}\varepsilon_{k-i}.$$

Montrer que Y_k vérifie (AR). Quelle est la loi de Y_k ?
4. On suppose que Z_0 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on définit $X_k = f(Z_k) - \mathbb{E}(f(Z_k))$. Montrer que si f vérifie $H(\alpha,[0,1])$ pour un $\alpha \in]0,1[$ (voir partie III, question 4 pour l'énoncé de la propriété $H(\alpha,[0,1])$), alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n > x) \leq 4\exp\left(-\frac{x^2}{2nD^2}\right) \text{ et } \mathbb{P}(\overline{M}_n > x) \leq 8\exp\left(-\frac{x^2}{2nD^2}\right),$$

pour une constante $D = D(f,\alpha)$ que l'on explicitera.
Écrire la borne obtenue lorsque $f(x) = g(x^\alpha)$, pour une fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|g(x) - g(y)| \leq |x-y|$. Comment se comporte cette borne lorsque α tend vers 0 ?
5. On considère un deuxième espace probabilisé $([0,1],\mathcal{B}[0,1],\lambda)$, où $\mathcal{B}[0,1]$ est la tribu des boréliens de $[0,1]$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On considère la transformation T de $[0,1]$ dans lui-même définie par $T(x) = 2x - [2x]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Quelle est la mesure image de λ par T ? Montrer que pour toutes les fonctions boréliennes bornées g,h de $[0,1]$, on a

$$\int_0^1 (g\circ T)(x)h(x)\ dx = \int_0^1 g(x)\left(\int_0^1 h(y)K(x,\ dy)\right)\ dx,$$

où $K(\cdot,x)$ est le noyau de transition de la question 1. En déduire que $(T,T^2,\ldots,T^n)$ a même loi que $(Z_n,Z_{n-1},\ldots,Z_1)$, lorsque Z_0 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Si $x > 0$ et si f vérifie $H(\alpha,[0,1])$ pour un $\alpha \in]0,1[$, donner une borne exponentielle pour la quantité

$$\lambda\left(\left|\sum_{k=1}^n \left(f\circ T^k - \int_0^1 f(t)\ dt\right)\right| > x\right).$$

Si l'on ne suppose plus que f est α-Höldérienne, mais que f est une fonction borélienne bornée telle que $f(1/2+x) = -f(x)$ pour tout x dans $[0,1/2[$, donner une borne pour la quantité précédente.

FIN