Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Unité M2MT01

Probabilités et Modélisation Stochastique

Corrigé du devoir en temps libre

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(X_n = x) &= P(\sum_{i=1}^{n} \zeta_i = x) \\ &= P(\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i + 1) = x + n) \\ &= P(\sum_{i=1}^{n} \frac{\zeta_i + 1}{2} = \frac{x+n}{2})\end{aligned}$$

Or les $(\zeta_i + 1)/2$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$: leur somme suit donc la loi binômiale de paramètres n et $1/2$, d'où

$$p_{n,x} = \mathcal{B}_{n,p}(\frac{x+n}{2}) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 1\!\!1_{\mathbb{Z}}(\frac{n+x}{2}) 1\!\!1_{[0,n]}(\frac{n+x}{2}) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 1\!\!1_D(n+x) 1\!\!1_{|x| \le n}.$$

2. Tout d'abord, remarquons que la probabilité d'aller de chaque point de $\mathbb{Z}$ à chacun de ces deux voisins est strictement positive, donc la chaîne est irréductible. D'après la théorie générale des chaînes de Markov, la chaîne est récurrente si et seulement si l'état 0 est récurrent, ce qui est vérifié si et seulement si
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}^0(X_n = 0) = +\infty.$$
Bien sûr,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}^0(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,0} \ge \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n,0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} 2^{-2n}.$$
D'après la formule de Stirling $(2n)! \sim (2n)^{2n} e^{-2n} (4\pi n)^{1/2}$ tandis que $n!^2 \sim n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)$. Finalement, $\frac{(2n)!}{n!^2} 2^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, et la série est donc divergente d'après le théorème sur les équivalents de séries positives, ce qui montre bien que la chaîne est récurrente.

3. D'abord, comme c'est l'inf d'une partie de $\mathbb{N}$, T_r est bien à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\{T_r = n\} = \{X_n = r\} \cap \cap_{i=0}^{n-1} \{X_i \neq r\}.$$

Par définition de $\mathcal{F}_n$, tous les X_i, pour $i \leq n$, sont $\mathcal{F}_n$-mesurables.

L'identité ci-dessus montre donc que $\{T_r = n\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Comme on a pris n quelconque, T_r est bien un temps d'arrêt.

$$\mathbb{P}_0(T_r < +\infty) = \mathbb{P}_0(\exists k \geq 0; X_k = r\} = 1,$$

car la chaîne de Markov est récurrente.

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) &= \mathbb{P}_0(X_n = k, T_r \leq n) \\
&= \mathbb{P}_0(X_{T_r + (n - T_r)} - X_{T_r} = k - r, T_r \leq n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_0(X_{T_r + (n-i)} - X_{T_r} = k - r, T_r = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_0(X_{n-i} = k - r)\mathbb{P}_0(T_r = i),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la propriété de Markov forte. Si l'on remplace k par $2r - k$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(X_n = 2r - k, S_n \geq r) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_0(X_{n-i} = (2r - k) - r)\mathbb{P}_0(T_r = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_0(X_{n-i} = r - k)\mathbb{P}_0(T_r = i)
\end{aligned}$$

Mais (par exemple d'après 1.1) $\mathbb{P}_0(X_{n-i} = k - r) = \mathbb{P}_0(X_{n-i} = r - k)$, donc finalement

$$\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) = \mathbb{P}_0(X_n = 2r - k, S_n \geq r)$$

Mais si $X_n = 2r - k = r + (r - k)$, alors $X_n \geq r$ donc $T_r \leq n$: Ainsi $\{X_n = 2r - k, S_n \geq r\} = \{X_n = 2r - k\}$, d'où

$$\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) = \mathbb{P}_0(X_n = 2r - k, S_n \geq r) = \mathbb{P}_0(X_n = 2r - k) = p_{n,2r-k}.$$

Reste à voir que $p_{n,2r-k} = p_{n,2r-k}1\!\!1_{D_n}(k, r)$: il suffit de montrer que $(p_{n,2r-k} > 0) \Longrightarrow (k, r) \in D_n$. Supposons donc que $p_{n,2r-k} > 0$. D'après la définition de $p_{n,x}$, $p_{n,2r-k} > 0$ implique que $|2r - k| \leq n$. On sait que $r \geq 0$. De plus, comme $r \geq k$, on a $r \leq r + (r - k) = 2r - k \leq |2r - k| \leq n$, soit $r \leq n$ et $r - k \leq r + (r - k) = 2r - k \leq |2r - k| \leq n$, soit $r - n \leq k$. On a donc bien $(k, r) \in D_n$.

5. Pour tout k entre 0 et n, on a $X_k \leq X_n + (n-k)$ car les ζ_i sont majorés en valeur absolue par 1. On a donc en particulier pour tout k entre 0 et n: $X_k \leq X_n + n$ En prenant le max des X_k entre 0 et n, on a finalement $S_n \leq X_n + n$.

   L'événement $\{S_n = r\}$ est inclus dans $\{X_n \leq r\}$ et l'événement $\{S_n \leq X_n + n\}$ est de probabilité 1: on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(S_n = r) &= \mathbb{P}_0(S_n = r, X_n \leq r, S_n \geq X_n + n) \\
&= \mathbb{P}_0(S_n = r, X_n \leq r, r \geq X_n + n) \\
&= \mathbb{P}_0(S_n = r, r - n \leq X_n \leq r) \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} \mathbb{P}_0(X_n = k, S_n = r) \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} \mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) - \mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r+1)
\end{aligned}$$

   Pour tout k entre $r-n$ et r, on a $r \geq \max(k,0)$ et a fortiori $r+1 \geq \max(k,0)$. On peut donc appliquer la formule trouvée à la question précédente, et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(S_n = r) &= \sum_{k=r-n}^{r} p_{n,2r-k} - p_{n,2(r+1)-k} \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} \mathbb{P}_0(X_n = 2r-k) - \mathbb{P}_0(X_n = 2r-k+2)) \\
&= \sum_{i=r}^{r+n} \mathbb{P}_0(X_n = i) - \mathbb{P}_0(X_n = i+2) \\
&= \mathbb{P}_0(X_n = r) + \mathbb{P}_0(X_n = r+1) - \mathbb{P}_0(X_n = n+r+1) - \mathbb{P}_0(X_n = n+r+2) \\
&= \mathbb{P}_0(X_n = r) + \mathbb{P}_0(X_n = r+1) \\
&= p_{n,r} + p_{n+1} \\
&= \max(p_{n,r}, p_{n,r+1}) + \min(p_{n,r}, p_{n,r+1}) \\
&= \max(p_{n,r}, p_{n,r+1}),
\end{aligned}$$

   car de $n+r$ et $n+r+1$, il y en a forcément un des deux qui est impair, et donc conduit à une probabilité nulle.

6. Montrons d'abord que pour tout entier x fixé, on a $p_{n,x} \sim 1\!\!1_D(n+x)\kappa n^{-1/2}$:

pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned} p_{n,x} &= 1\!\!1_D(n+x)2^{-n}\frac{n!}{(\frac{n+x}{2})!(\frac{n-x}{2})!} \\ &\sim 1\!\!1_D(n+x)2^{-n}\frac{\phi(n)}{\phi(\frac{n+x}{2})\phi(\frac{n-x}{2})}, \end{aligned}$$

où on a posé $\phi(n) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Un calcul simple montre que pour tout x réel fixé et tout réel n tendant vers l'infini, on a

$$\phi(n+x) = n^n(1+x/n)^n e^{-x}(n+x)^x e^{-n}\sqrt{2\pi(n+x)} \sim n^n n^x e^{-n}\sqrt{2\pi n} = n^x\phi(n)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_{n,x} &\sim 1\!\!1_D(n+x)2^{-n}\frac{\phi(n)}{\phi(\frac{n+x}{2})\phi(\frac{n-x}{2})} \\ &\sim 1\!\!1_D(n+x)2^{-n}\frac{\phi(n)}{\phi(\frac{n}{2})(n/2)^x\phi(\frac{n}{2})(n/2)^{-x}} \\ &\sim 1\!\!1_D(n+x)2^{-n}\frac{\phi(n)}{\phi(\frac{n}{2})^2} \\ &\sim 1\!\!1_D(n+x)\kappa n^{-1/2} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(S_n = r) &= \max(p_{n,r}, p_{n,r+1}) \\ &\sim \max(1\!\!1_D(n+x)\kappa n^{-1/2}, 1\!\!1_D(n+x+1)\kappa n^{-1/2}) \\ &\sim \kappa n^{-1/2}\max(1\!\!1_D(n+x), 1\!\!1_D(n+x+1)) \\ &\sim \kappa n^{-1/2} \end{aligned}$$

7. (a)

$$\begin{aligned} S_{n+p} &= \max_{0\le k\le n+p} X_k \\ &= \max(\max_{0\le k\le n} X_k, \max_{n\le k\le n+p} X_k) \\ &= \max(S_n, \max_{n\le k\le n+p}(X_k - X_n) + X_n) \\ &= \max(S_n, \max_{0\le q\le p}(X_{n+q} - X_n) + X_n) \\ &= \max(S_n, \max_{0\le q\le p}(\hat{X}_q + X_n) \\ &= \max(S_n, X_n + \max_{0\le j\le p}(\hat{X}_q) \\ &= \max(S_n, X_n + \hat{S}_p) \end{aligned}$$

Notons qu'ici, on ne prend à chaque fois qu'un nombre fini de termes, donc les sup et les max coincident.

(b) Posons $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$, $Y = \hat{S}_p$ et

$$g(x,y) = \phi(\max(x_0, x_1, \dots, x_n, x_n + y)).$$

D'après la question précédente, on a

$$\phi(S_{n+p}) = g(X,Y).$$

Par définition $\mathcal{F}_n = \sigma(X)$. Il est aisé de voir que X est $\sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$-mesurable. En revanche, comme

$$\begin{aligned} Y = \hat{S}_p &= \sup_{0 \le q \le p} \hat{X}_q && (1)\\ &= \sup_{0 \le q \le p} X_{n+q} - X_n && (2)\\ &= \sup_{0 \le q \le p} \zeta_{n+1} + \zeta_{n+2} + \dots \zeta_{n+q} && (3) \end{aligned}$$

Y est $\sigma(\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+p})$ mesurable. Comme ces deux tribus sont indépendantes, X et Y sont indépendants.

Comme Y est indépendant de X, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[g(X,Y)|X] = G(X),$$

avec

$$G(x) = \int g(x,y) dP_Y(y).$$

En effet, soit A un borélien de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}1\!\!1_A(X)G(X) &= \int 1\!\!1_A(x) G(x) d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int 1\!\!1_A(x) \int g(x,y) dP_Y(y) d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int 1\!\!1_A(x) g(x,y) d(P_X \otimes P_Y)(x,y)\\ &= \int 1\!\!1_A(x) g(x,y) d(P_{X,Y})(x,y)\\ &= \mathbb{E}1\!\!1_A(X) g(X,Y) \end{aligned}$$

Bien entendu, $G(X)$ est $\sigma(X)$-mesurable, donc $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Dans ce cas précis, cela donne

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x,y) dP_Y(y)\\ &= \int \phi(\max(x_0, \dots, x_n, x_n + y)) dP_{\hat{S}_p}(y)\\ &= \mathbb{E}_0 \phi(\max(x_0, \dots, x_n, x_n + \hat{S}_p))\\ &= ((\Lambda_p \phi) \circ h)(x), \end{aligned}$$

où $h(x) = (x_n, \max(x_0, \dots, x_n))$ et où on a pris l'équation

$$[\Lambda_p \phi](x,s) = \mathbb{E}_0 \phi(\max(s; x + \hat{S}_p)$$

comme définition de $[\Lambda_p \phi]$.
Finalement, on a bien

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{F}_n] = G(X) = ((\Lambda_p \phi) \circ h)(X) = [\Lambda_p \phi](h(X)) = [\Lambda_p \phi](X_n, S_n)$$

Reste à montrer les deux dernières égalités. D'après l'équation (3), on voit facilement que $\hat{S}_p \leq p$.
Ainsi

$$1 = 1\!\!1_{\{\hat{S}_p \geq s-x\}} + 1\!\!1_{\{\hat{S}_p < s-x\}} = 1\!\!1_{\{p \geq \hat{S}_p \geq s-x\}} + 1\!\!1_{\{\hat{S}_p < s-x\}} = \sum_{j=s}^{x+p} 1\!\!1_{\{\hat{S}_p + x = j\}} + 1\!\!1_{\{\hat{S}_p < s-x\}}$$

En multipliant par les membres extrêmes par $\phi(\max(s; x + \hat{S}_p)$ et en distribuant, on a:

$$\phi(\max(s; x + \hat{S}_p)) = \sum_{j=s}^{x+p} 1\!\!1_{\{\hat{S}_p + x = j\}} \phi(j) + 1\!\!1_{\{\hat{S}_p < s-x\}} \phi(s)$$

Il suffit alors d'intégrer, et on obtient

$$\mathbb{E}_0 \phi(\max(s; x + \hat{S}_p)) = \sum_{j=s}^{x+p} \mathbb{P}_0(\hat{S}_p + x = j)\phi(j) + \mathbb{P}_0(\hat{S}_p < s - x)\phi(s)$$

Pour la dernière égalité il suffit de remarquer que l'égalité (3) montre que S_p et $\hat{S}_p$ ont la même loi sous $\mathbb{P}_0$ − la loi image de $\delta_0 \otimes (\frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2})^{\otimes p}$ par

$$(x_0, \dots, x_p) \mapsto \sup_{0 \leq q \leq p} (x_0 + \dots + x_q).$$

Ainsi, on peut remplacer dans chacun des termes de l'expression $\hat{S}_p$ par S_p sans changer la probabilité.

Exercice 2

1. Comme R_{n+1} et R_n sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut écrire pour f bornée sur $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|R_n = j] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_x(R_{n+1} = k | R_n = j) f(k)$$

En particulier, en prenant $f(x) = 1/(1+x)$

$$\mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|R_n = 0] = 1 f(0) = 1 \times \frac{1}{1+0} = 1$$

et pour $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|R_n = j] &= \frac{j+2}{2j+2} f(j+1) + \frac{j}{2j+2} f(j-1) \\
&= \frac{j+2}{2j+2}\frac{1}{j+2} + \frac{j}{2j+2}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{j+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, on remarque pour tout $j \geq 0$

$$\mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|R_n = j] = f(j),$$

ce qui montre que

$$\mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|R_n] = f(R_n)$$

Comme $(R_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov,

$$\mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|R_n] = \mathbb{E}_x[f(R_{n+1})|\mathcal{R}_n],$$

ce qui montre que la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ définie par $Z_n = f(R_n)$ est une $\mathbb{Q}_x$-martingale $(\mathcal{R}_n)_{n\geq 0}$-adaptée. Comme R_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, Z_n prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et est donc bornée. D'après le théorème d'arrêt $(Z_{\tau_1 \wedge n})_{n\geq 0}$ est également une $\mathbb{Q}_x$-martingale bornée.

2. (a) Posons $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. Comme inf de deux temps d'arrêts, τ est un temps d'arrêt. Toujours d'après le théorème d'arrêt $(Z_{\tau\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale. En particulier, pour tout n

$$\mathbb{E}_x Z_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}_x Z_{\tau\wedge 0} = \mathbb{E}_x Z_0 = \frac{1}{1+x}.$$

$\tau < +\infty$ p.s. car $\tau \leq \tau_b$ et on a admis que $\tau_b < +\infty$ p.s. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} Z_{\tau\wedge n} = Z_\tau \ \mathbb{Q}_x p.s.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée (avec domination par 1), on voit alors que

$$\mathbb{E}_x Z_\tau = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x Z_{\tau\wedge n} = \frac{1}{1+x} = f(x).$$

Cependant

$$\begin{aligned}
Z_\tau &= Z_\tau 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + Z_\tau 1\!\!1_{\{\tau_a\geq\tau_b\}} \\
&= Z_{\tau_a} 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + Z_{\tau_b} 1\!\!1_{\{\tau_a\geq\tau_b\}} \\
&= f(R_{\tau_a}) 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + f(R_{\tau_b}) 1\!\!1_{\tau_a\geq\tau_b} \\
&= f(a) 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + f(b) 1\!\!1_{\tau_a\geq\tau_b}
\end{aligned}$$

En intégrant, on a alors,

$$f(x) = \mathbb{E}_x Z_\tau = f(a)\mathbb{Q}_x(\{\tau_a < \tau_b\}) + f(b)\mathbb{Q}_x(\tau_a \geq \tau_b),$$

soit si l'on pose $q = \mathbb{Q}_x(\{\tau_a < \tau_b\})$

$$f(x) = qf(a) + (1-q)f(b),$$

d'où

$$q = \frac{f(b) - f(x)}{f(b) - f(a)}$$

(b) Pour tout p on a $\mathbb{Q}_x$ presque sûrement $R_{p+1} \leq R_p + 1$: on en déduit que pour tout n $\tau_n \geq n - x$. En particulier τ_n tend $\mathbb{Q}_x$ presque sûrement vers $+\infty$. Ainsi

$$1\!\!1_{\{\tau_a < +\infty\}} = \lim_{n \to +\infty} 1\!\!1_{\{\tau_a < \tau_n\}}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée (avec domination par 1), on a alors

$$\mathbb{E}_x 1\!\!1_{\{\tau_a < +\infty\}} = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x 1\!\!1_{\{\tau_a < \tau_n\}}$$

soit

$$\mathbb{Q}_x(\tau_a < +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{Q}_x(\tau_a < \tau_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n) - f(x)}{f(n) - f(a)} = \frac{f(x)}{f(a)} = \frac{a+1}{x+1}.$$

(c) On a pour tout n $|R_n - R_{n+1}| = 1$: il s'ensuit que $\{R_n; n \geq 0\}$ est une partie connexe de $\mathbb{Z}$ contenant $R_0 = x$.
Ainsi, si $a \in \{0, \ldots, x\}$, dire que $J_0 \geq a$ signifie que a est une valeur atteinte par la suite $(R_n)_{n \geq 0}$, c'est à dire que $\tau_a < +\infty$. Ainsi

$$\{J_0 \geq a\} = \{\tau_a < +\infty\},$$

d'où

$$\mathbb{Q}_x(J_0 \geq a) = \mathbb{Q}_x(\tau_a < +\infty) = \frac{a+1}{x+1},$$

ce qui entraîne aisément que J_0 suit la loi uniforme sur $\{0, \ldots, x\}$.

FIN