Concours d'admission a l'ENS Cachan (3ème année)
Option Mathématiques

Epreuve Ecrite de Mathématiques 2
Sujet Probabilités et Statistiques

On commencera dans ce problème par considérer une marche aléatoire symétrique simple $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$, que l'on peut définir de la manière suivante : soit $\{\xi_i;\, i\geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et prenant les valeurs $+1$ ou -1. On suppose que pour tout $i\geq 1$, on a

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2,$$

et pour une condition initiale $x\in\mathbb{Z}$, on pose

$$X_0 = x, \qquad \text{et pour } n\geq 1 \quad X_n = x + \sum_{i=1}^{n} \xi_i. \tag{1}$$

On notera alors $\mathbf{P}_x$ la loi de chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, en précisant la condition initiale $x\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que

$$\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}_x(X_{n+1} = z+1 | X_n = z) = \mathbf{P}_x(X_{n+1} = z-1 | X_n = z) = \frac{1}{2},$$

pour tout $n\geq 0$ et $z\in\mathbb{Z}$. Introduisons aussi la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ associée à X_n, c'est-à-dire que l'on pose

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n), \qquad \text{pour} \qquad n\geq 0.$$

La constante $\kappa = (2/\pi)^{1/2}$ apparaîtra souvent au cours des calculs qui suivent.

Exercice 1 On se propose ici d'étudier quelques propriétés du maximum unilatère $(S_n)_{n\geq 0}$ de la marche aléatoire, défini par

$$S_n = \sup_{k\leq n} X_k, \qquad \text{pour} \qquad n\geq 0.$$

On essaiera plus particulièrement de préciser la loi du processus $(S_n)_{n\geq 0}$. Rappelons pour cet exercice la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n} (2\pi n)^{1/2}, \qquad \text{lorsque} \qquad n\to\infty.$$

1.1 Soit D l'ensemble des nombres pairs de $\mathbb{Z}$, x un élément de $\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$. On pose $p_{n,x} = \mathbf{P}_0(X_n = x)$. Démontrer la formule :

$$p_{n,x} = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^{(n+x)/2} \mathbf{1}_D(n+x) \mathbf{1}_{\{|x|\leq n\}}.$$

1.2 Démontrer que la chaîne de Markov X est récurrente.

1.3 Rappelons que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ désigne la filtration canonique associée à X_n, et qu'un temps d'arrêt T pour la filtration $\mathcal{F}_n$ est une variable aléatoire $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ vérifiant, pour tout $n \geq 0$:

$$A_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable,} \quad \text{où} \quad A_n = \{\omega \in \Omega;\, T(\omega) = n\}.$$

Pour $r \in \mathbb{Z}$ on notera T_r le temps d'atteinte du niveau r par X_n, défini par

$$T_r = \inf\{n \geq 0;\, X_n = r\}.$$

Montrer que T_r est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n$, et que T_r est fini presque sûrement.

1.4 On rappelle à présent la propriété de Markov forte pour la marche aléatoire : soit T un temps d'arrêt fini presque sûrement. Pour un tel temps d'arrêt, on note $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des parties mesurables A de Ω telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $A \cap (T = n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Dans ce contexte, la propriété de Markov forte affirme que la suite $\{X_{T+n} - X_T;\, n \geq 0\}$ est une marche aléatoire issue de 0, indépendante de la σ-algèbre $\mathcal{F}_T$.

En appliquant la propriété de Markov forte, montrer que pour $r \geq \max(k\,;\,0)$, on a :

$$\mathbf{P}_0(X_n = k,\, S_n \geq r) = \mathbf{P}_0(X_n = 2r - k,\, S_n \geq r) = \mathbf{P}_0(X_n = 2r - k) = p_{n,2r-k}\,\mathbf{1}_{D_n}(k, r),$$

où l'ensemble D_n est défini par $D_n = \{(k, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N};\, 0 \leq r \leq n,\, r - n \leq k \leq r\}$.

1.5 A partir de la question précédente, déduire que

$$\mathbf{P}_0(S_n = r) = \sum_{k=r-n}^{r} \left[p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}\right] = \max\left(p_{n,r}\,;\, p_{n,r+1}\right).$$

1.6 Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que $\mathbf{P}_0(S_n = k)$ est équivalente, lorsque $n \to \infty$, à $\kappa n^{-1/2}$. On pourra utiliser pour cela la formule de Stirling rappelée au début de l'exercice.

1.7 Soient $n, p \geq 0$. Considérons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bornée, et posons, pour $j \geq 0$, $\hat{X}_j = X_{n+j} - X_n$, ainsi que $\hat{S}_j = \sup_{0\leq q\leq j} \hat{X}_q$. Notons aussi $\mathbf{E}_0$ l'espérance sous $\mathbf{P}_0$.

1. Montrer que
$$S_{n+p} = \max\left(S_n; X_n + \hat{S}_p\right).$$

2. En déduire que
$$\mathbf{E}_0\left[\varphi(S_{n+p})|\mathcal{F}_n\right] = [\Lambda_p\varphi](X_n, S_n),$$

avec la fonction $[\Lambda_p\varphi]$ définie, pour $(x,s)\in D_n$, par

$$\begin{aligned}
[\Lambda_p\varphi](x,s) &= \mathbf{E}_0\left[\varphi\left(\max(s;\, x+\hat{S}_p)\right)\right] \\
&= \sum_{j=s}^{x+p} \mathbf{P}_0(\hat{S}_p = j-x)\,\varphi(j) + \varphi(s)\,\mathbf{P}_0(\hat{S}_p < s-x) \\
&= \sum_{j=s}^{x+p} \mathbf{P}_0(S_p = j-x)\,\varphi(j) + \varphi(s)\,\mathbf{P}_0(S_p < s-x).
\end{aligned}$$

Exercice 2 On étudiera ici quelques propriétés de la chaîne de Bessel, que l'on notera $(R_n)_{n\geq 0}$. Cette chaîne est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ses incréments successifs prennent les valeurs ± 1. Soit $\{\mathbf{Q}_x; x\in\mathbb{N}\}$ la famille de lois définissant une chaîne de Bessel de condition initiale x. Alors $\mathbf{Q}_x(R_{n+1}=1|R_n=0)=1$, et si $j\geq 1$,

$$\mathbf{Q}_x(R_{n+1}=j+1|R_n=j) = \frac{j+2}{2j+2} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_x(R_{n+1}=j-1|R_n=j) = \frac{j}{2j+2}.$$

On notera encore $\mathcal{R}_n = \sigma(R_0,\ldots,R_n)$ la filtration naturelle de ce processus, ainsi que

$$J_n = \inf_{j\geq n} R_j, \quad \text{et} \quad \tau_a = \inf\{j\geq 0;\, R_j = a\}, \text{ pour } a\in\mathbb{N}.$$

Rappelons aussi que τ_a est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{R}_n$ (voir question 1.3).

2.1 On pose, pour tout $n\geq 0$, $Y_n = (R_{n\wedge\tau_1}+1)^{-1}$, où $n\wedge\tau_1 = \min(n;\tau_1)$. Montrer que pour tout $x\geq 1$, $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathbf{Q}_x$-martingale bornée.

2.2 Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0<a<x<b$. On admettra dans ces conditions que τ_b est fini $\mathbf{Q}_x$-presque sûrement.

1. En appliquant le théorème de la convergence dominée à la martingale Y_n, montrer que
$$\mathbf{Q}_x(\tau_a<\tau_b) = \frac{\frac{1}{b+1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+1}}.$$
2. En déduire que $\mathbf{Q}_x(\tau_a<\infty) = (a+1)/(x+1)$.
3. Démontrer que J_0 suit la loi uniforme sur $\{0,\ldots,x\}$.

Exercice 3 Retournons à présent au contexte de la marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par (1). On essaiera dans la suite du problème de définir une mesure G sur l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$, muni de la tribu engendrée par $\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$. Cette mesure G pénalisera les trajectoires de (X_n) ayant un maximum unilatère élevé. On se demandera alors si sous cette nouvelle probabilité G, le processus (X_n) a un maximum global fini.

La construction de la mesure G se fait à l'aide d'une procédure limite : on se place tout d'abord à horizon $n\geq 0$ fixé. On considère alors une mesure G_n sur $\mathcal{F}_n$ définie de la manière suivante : pour tout $\Gamma_n\in\mathcal{F}_n$, on pose

$$G_n(\Gamma_n) = \frac{\mathbf{E}_0[\varphi(S_n)\,\mathbf{1}_{\Gamma_n}]}{\mathbf{E}_0[\varphi(S_n)]},$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée, telle que pour tout $M \geq 0$, on a

$$\inf_{0 \leq m \leq M} \varphi(m) = c_M > 0.$$

On s'intéressera alors aux propriétés de la limite éventuelle de G_n lorsque $n \to \infty$.

3.1 Montrer que, à n fixé, G_n est une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}_n$.

3.2 Rappelons que pour $n \geq 0$, l'ensemble D_n est défini par

$$D_n = \{(k, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}; 0 \leq r \leq n,\, r - n \leq k \leq r\}.$$

De plus, pour $n, p \geq 0$ et $(x, s) \in D_n$, la quantité $[\Lambda_p \varphi](x, s)$ a été introduite à la question 1.7. Démontrer alors que, pour $\Gamma_n \in \mathcal{F}_n$, on a

$$G_{n+p}(\Gamma_n) = \mathbf{E}_0 \left[\mathbf{1}_{\Gamma_n} U_{n,p} \right], \qquad \text{avec} \qquad U_{n,p} = \frac{[\Lambda_p \varphi](X_n, S_n)}{[\Lambda_{n+p} \varphi](0, 0)}.$$

3.3 On suppose d'une part que, à n fixé, $\sup_{p \geq 0} \mathbf{E}_0[U_{n,p}^2] < \infty$, et que d'autre part, pour tout $(x, s) \in D_n$, la limite

$$M_n(x, s) = \lim_{p \to \infty} \frac{[\Lambda_p \varphi](x, s)}{[\Lambda_{n+p} \varphi](0, 0)}$$

existe.

1. Posons $M_n := M_n(X_n, S_n)$. Déduire des hypothèses que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\{G_k; k \geq 0\}$ converge sur $\mathcal{F}_n$ vers une mesure G, définie par $G(\Gamma_n) = \mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\Gamma_n} M_n]$ pour tout $\Gamma_n \in \mathcal{F}_n$. La convergence s'entendra au sens suivant : pour tout $\Gamma_n \in \mathcal{F}_n$, on a
$$\lim_{k \to \infty} G_k(\Gamma_n) = G(\Gamma_n). \tag{2}$$
2. Supposons de plus que pour tout $N \geq 0$, la famille $\{M_n(s, x); n \leq N, (s, x) \in D_n\}$ est bornée. Montrer dans ce cas que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

3.4 On s'intéresse à présent au cas particulier où $\varphi(j) = \gamma e^{-\beta j}$ pour $j \in \mathbb{N}$, avec $\beta > 0$, et $\gamma = (1 - e^{-\beta})$.

1. En utilisant les résultats de l'exercice 1 et en appliquant le théorème de Lebesgue, montrer que, pour tout couple $(x, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $s \geq x$, on a
$$\lim_{p \to \infty} p^{1/2} [\Lambda_p \varphi](x, s) = \kappa e^{-\beta s} \left[\gamma(s - x) + 1 \right].$$
2. En déduire que la suite $\{G_k; k \geq 0\}$ converge au sens de (2) vers une mesure G dont la restriction sur $\mathcal{F}_n$ est donnée par $G(\Gamma_n) = \mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\Gamma_n} M_n]$ pour tout $\Gamma_n \in \mathcal{F}_n$, avec
$$M_n = e^{-\beta S_n} \left[\gamma(S_n - X_n) + 1 \right].$$
3. Vérifier que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ presque sûrement. En déduire que M_n ne converge pas dans $L^1(\Omega)$.

On a donc construit dans cet exercice une mesure G sur tout $\mathcal{F}_n$ pour $n \geq 0$. On admet que cette mesure se prolonge sur l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$ muni de la tribu engendrée par $\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$.

Exercice 4 On reprend dans cet exercice les notations de l'exercice précédent, et on se concentrera sur l'exemple $\varphi(j) = \gamma e^{-\beta j}$ de la question 3.4. La mesure G construite à l'exercice 3 définit aussi un processus $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ sur un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}_G)$ dont les incréments successifs sont égaux à ± 1. En effet, si $0 \leq n_1 < \ldots < n_k$ sont des instants discrets, et $A_1, \ldots, A_k$ des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, on pose

$$\mathbf{P}_G\left(\tilde{X}_{n_1} \in A_1, \ldots, \tilde{X}_{n_k} \in A_k\right) = G(\Gamma), \tag{3}$$

où Γ est le sous-ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ défini par

$$\Gamma = \left\{(x_n)_{n\geq 0};\, x_{n_1} \in A_1, \ldots, x_{n_k} \in A_k\right\}.$$

La formule (3) définit alors la loi du processus $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$. On se propose d'étudier ici quelques propriétés simples de ce processus.

4.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera par $\tilde{S}_n$ le maximum unilatère pour $\tilde{X}$, c'est-à-dire

$$\tilde{S}_n = \sup_{k\leq n} \tilde{X}_k, \qquad \text{pour} \qquad n \geq 0.$$

Rappelons que pour $p \in \mathbb{N}$, on a aussi défini le temps d'atteinte T_p du niveau p par le processus X à la question 1.3. Montrer alors que

$$\mathbf{P}_G\left(\tilde{S}_n \geq p\right) = \mathbf{E}_0\left[\mathbf{1}_{(T_p\leq n)} M_{T_p}\right] = e^{-\beta p}\mathbf{P}_0\left(T_p \leq n\right).$$

4.2 En déduire que la loi du suprémum unilatère de $\tilde{X}$ sous G, que l'on appelle $\tilde{S}_\infty$, est donnée par

$$\mathbf{P}_G\left(\tilde{S}_\infty = p\right) = \gamma e^{-\beta p}.$$

Remarquer en particulier que $\tilde{S}_\infty$ est fini $\mathbf{P}_G$-presque sûrement.

4.3 On admettra pour cette question le résultat suivant :

(P1) Soit R le processus défini par $R_n = 2S_n - X_n$. Alors, sous $\mathbf{P}_0$, R est une marche de Bessel issue de 0, et la loi conditionnelle de S_n sachant $\mathcal{R}_n$ est la loi uniforme sur $\{0, \ldots, 2S_n - X_n\}$, avec $\mathcal{R}_n = \sigma(R_0, \ldots, R_n)$.

On essaiera maintenant de déterminer la loi du processus $\tilde{R}$ défini par $\tilde{R}_n = 2\tilde{S}_n - \tilde{X}_n$ sous G.

1. Montrer que $\mathbf{E}_0\left[M_p | \mathcal{R}_p\right] = 1$.
2. Soit $F : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Démontrer que

$$\mathbf{E}_G\left[F(\tilde{R}_n;\, n \leq p)\right] = \mathbf{E}_0\left[F(R_n;\, n \leq p)\right],$$

où $\mathbf{E}_G$ désigne l'espérance sous la probabilité $\mathbf{P}_G$. En déduire que la loi de $\tilde{R}$ sous G est la même que celle de R sous $\mathbf{P}_0$.