B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Aucun document personnel n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Le sujet comporte 9 pages

Le problème consiste en un prologue, suivi de trois parties. Les deux premières parties sont indépendantes. La troisième partie utilise les notations et certains résultats des parties précédentes.

Notations et rappels Pour tout entier $p \geq 1$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $p \times p$ à coefficients complexes, et I la matrice identité, sans préciser sa dimension. On rappelle que le spectre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est l'ensemble de ses valeurs propres, et que le rayon spectral de A est le maximum des modules des valeurs propres. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, A^* désigne la matrice transposée conjuguée, définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2, \quad (A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}.$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dite unitaire si $A^*A = I$, hermitienne si $A^* = A$, et normale si $A^*A = AA^*$. L'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ est muni du produit hermitien :

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^p, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{p} \overline{u_j}\, v_j,$$

dont la norme correspondante est notée $\| \ \|$. On munit l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme matricielle induite :

$$\|A\| = \sup_{u \in \mathbb{C}^p, \|u\|=1} \|Au\| .$$

Une matrice hermitienne $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dite positive si pour tout $u \in \mathbb{C}^p$, le nombre (réel) $\langle u, Au \rangle$ est positif ou nul.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, 2π-périodique, on notera $c_k(f)$ son k-ième coefficient de Fourier :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(\theta)\, d\theta .$$

Prologue

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a

$$\|A\| = \sup_{u,v \in \mathbb{C}^p, \|u\|=\|v\|=1} |\langle v, Au \rangle| .$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice normale. Montrer que la norme de A est égale au rayon spectral de A.

I. Familles de matrices de puissances uniformément bornées

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On dira que la famille $\mathcal{A}$ est de puissances uniformément bornées s'il existe un réel positif C_1 tel que

$$\forall\, A \in \mathcal{A}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|A^k\| \leq C_1 . \tag{1}$$

On dira que $\mathcal{A}$ est de résolvente uniformément bornée si pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, le spectre de A est contenu dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C}\,, |z| \leq 1\}$, et si, de plus, il existe un réel positif C_2 tel que

$$\forall\, A \in \mathcal{A}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, |z| > 1\,, \qquad \|(zI - A)^{-1}\| \leq \frac{C_2}{|z| - 1} . \tag{2}$$

Le but de cette partie est de montrer qu'une famille de matrices $\mathcal{A}$ est de puissances uniformément bornées si, et seulement si elle est de résolvente uniformément bornée. A la question 5, on explicitera une condition qui implique ces deux propriétés.

1. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une famille de matrices de puissances uniformément bornées, et soit alors C_1 un réel positif tel que (1) ait lieu. On se donne une matrice $A \in \mathcal{A}$.

   a) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

   b) Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > 1$. Montrer que la série de terme général $z^{-k} A^k$ est convergente. On définit :

$$B(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} A^k .$$

   Montrer que l'on a :

$$\|B(z)\| \leq \frac{C_1}{|z| - 1} .$$

c) Montrer que $(zI - A)B(z) = I$, et en déduire que la famille $\mathcal{A}$ est de résolvente uniformément bornée.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer l'inégalité :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |c_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} |f'(\theta)|\, d\theta\,.$$

3. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction 2π-périodique de la forme :

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta)\,,$$

où $m \in \mathbb{N}$, et $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m$ sont des nombres réels. Montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors f possède au plus $2m$ zéros sur l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$.

b) On considère maintenant $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction 2π-périodique de la forme :

$$g(\theta) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m_1} \alpha_j \cos(j\theta) + \beta_j \sin(j\theta)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m_2} \delta_k \cos(k\theta) + \gamma_k \sin(k\theta)}\,,$$

où $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, et où les coefficients $\alpha_j, \beta_j, \delta_k, \gamma_k$ sont réels. On suppose de plus que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une subdivision :

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_\ell < \theta_{\ell+1} = 2\pi\,,$$

avec $0 \leq \ell \leq 2(m_1 + m_2)$, et telle que g est monotone sur chacun des intervalles $[\theta_k, \theta_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, \ell$. Montrer enfin l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} |g'(\theta)|\, d\theta \leq (4m_1 + 4m_2 + 2) \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |g(\theta)|\,.$$

4. Dans cette question, on se donne $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une famille de matrices de résolvente uniformément bornée, et un réel positif C_2 tel que les inégalités (2) aient lieu. Soit $A \in \mathcal{A}$, et soit d le degré de son polynôme minimal P_A :

$$P_A(z) = \sum_{k=0}^{d} \mu_k\, z^k\,, \quad \mu_d = 1\,.$$

Soient $u, v \in \mathbb{C}^p$ de norme 1, et soit finalement un nombre réel $r > 1$. On définit les fonctions $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodiques suivantes :

$$\varphi(\theta) = \mathrm{Re}\, \langle v, (re^{i\theta} I - A)^{-1} u\rangle\,, \quad \psi(\theta) = \mathrm{Im}\, \langle v, (re^{i\theta} I - A)^{-1} u\rangle\,.$$

a) Expliquer pourquoi on a $d \leq p$, et pourquoi les racines de P_A se situent dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a les inégalités :

$$|\varphi(\theta)| \leq \frac{C_2}{r-1}\,, \quad |\psi(\theta)| \leq \frac{C_2}{r-1}\,.$$

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, et pour tout entier $j = 0, \ldots, d$, on a :

$$P_A^{(j)}(z) = \sum_{k=j}^{d} \mu_k \, \frac{k!}{(k-j)!} z^{k-j} \,,$$

où $P_A^{(j)}$ désigne le polynôme P_A dérivé j fois. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j!} \, P_A^{(j)}(z) \, (A - zI)^j = -P_A(z) \, I \,.$$

d) Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, on a la relation :

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{P_A(z)} \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j!} \, P_A^{(j)}(z) \, (A - zI)^{j-1} \,.$$

e) Montrer que les fonctions $\varphi(\theta)$ et $\psi(\theta)$ sont de la forme :

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{d} \alpha_j \, \cos(j\theta) + \beta_j \, \sin(j\theta)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \delta_k \, \cos(k\theta) + \gamma_k \, \sin(k\theta)} \,,$$

où les coefficients $\alpha_j, \beta_j, \delta_k, \gamma_k$ sont réels, et où le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. (On ne cherchera pas une expression exacte des coefficients, mais seulement à montrer que $\varphi(\theta)$ et $\psi(\theta)$ s'écrivent sous cette forme.) Déduire des questions 2 et 3 l'inégalité suivante sur les coefficients de Fourier de φ et ψ :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,, \quad |c_k(\varphi)| \leq \frac{4d+1}{\pi k} \max_{\theta \in [0,2\pi]} |\varphi(\theta)| \,, \quad |c_k(\psi)| \leq \frac{4d+1}{\pi k} \max_{\theta \in [0,2\pi]} |\psi(\theta)| \,.$$

f) On admettra que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a la relation :

$$\langle v, A^k u \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \zeta^k \, \langle v, (\zeta I - A)^{-1} u \rangle \, d\zeta \,,$$

où Γ désigne le cercle de centre 0 et de rayon r. On rappelle que r a été fixé strictement supérieur à 1, de sorte que Γ ne contient aucun élément du spectre de A. En paramétrant l'intégrale curviligne, et en exploitant le résultat de la question 4e), montrer que l'on a :

$$|\langle v, A^k u \rangle| \leq \frac{(4d+1) r^{k+1}}{\pi (k+1)} \left[\max_{\theta \in [0,2\pi]} |\varphi(\theta)| + \max_{\theta \in [0,2\pi]} |\psi(\theta)| \right] \,.$$

g) Soit $k \in \mathbb{N}$. A l'aide des questions 4a), 4b), et 4f), en choisissant $r = 1 + 1/(k+1)$, montrer que :

$$|\langle v, A^k u \rangle| \leq \frac{2(4d+1) \, e^1 \, C_2}{\pi} \,.$$

Conclure que $\mathcal{A}$ est une famille de matrices de puissances uniformément bornées.

5. Dans cette question, on se donne $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une famille de matrices vérifiant la condition suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall u \in \mathbb{C}^p, \quad |\langle u, Au\rangle| \leq \|u\|^2 . \tag{3}$$

   a) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, le spectre de A est contenu dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

   b) Soit $A \in \mathcal{A}$, et soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > 1$. Soit enfin $v \in \mathbb{C}^p$. Montrer que le système linéaire :
$$(zI - A)u = v$$
a une unique solution, et que cette solution, que l'on notera u, satisfait :
$$(|z| - 1)\,\|u\| \leq \|v\| .$$

   c) En déduire que $\mathcal{A}$ est de résolvente uniformément bornée, puis que $\mathcal{A}$ est de puissances uniformément bornées. Donner un majorant de la quantité :
$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\| .$$

II. Etude d'une équation aux dérivées partielles

On note $L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$ l'espace des fonctions intégrables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^p$, la mesure sur $\mathbb{R}^2$ étant la mesure de Lebesgue. La transformée de Fourier d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$ est définie par la formule :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, u(x)\, dx ,$$

où $\langle x, \xi\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ (restriction à $\mathbb{R}^2$ du produit hermitien sur $\mathbb{C}^2$), et où l'intégration se fait "coordonnée par coordonnée", car on intègre ici une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^p$. On rappelle que si $u \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, et si de plus $\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, \mathcal{F}u(\xi)\, d\xi . \qquad \text{(Formule d'inversion de Fourier)}$$

On rappelle également que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p) \cap L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, on a $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, avec l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|\mathcal{F}u(\xi)\|^2\, d\xi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \|u(x)\|^2\, dx , \qquad \text{(Théorème de Plancherel)}$$

ce qui permet de prolonger, de manière unique, la transformée de Fourier en une application linéaire continue, et bijective sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$. Ce prolongement est encore noté $\mathcal{F}$, et la formule d'inversion de Fourier reste valable pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$ vérifiant $\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$.

On désigne par $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$ qui vérifient :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|\xi\|^2)^3\, \|\mathcal{F}u(\xi)\|^2\, d\xi \right)^{1/2} < +\infty .$$

Cette quantité définit une norme sur $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, notée $\|\ \|_{\mathcal{H}}$, et l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$ muni de cette norme est complet.

On considère deux matrices $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, que l'on suppose hermitiennes, et on se propose d'étudier l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0 , & t, x_1, x_2 \in \mathbb{R} , \\ u(0, x_1, x_2) = a(x_1, x_2) , & x_1, x_2 \in \mathbb{R} , \end{cases} \tag{4}$$

où $a \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$. On prendra garde que l'inconnue $u(t,x_1,x_2)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^p$. Pour alléger les notations, on note $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

1. Soit $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. En notant $\exp(iH)$ l'exponentielle de la matrice iH, montrer que $\exp(iH)$ est une matrice unitaire.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale :
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi}{(1+\|\xi\|^2)^\alpha}$$
est finie si, et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, quelle est la valeur de l'intégrale ?
3. a) Etant donnée $a \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application :
$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^p\\ \xi &\longmapsto \exp\left[-it(\xi_1A_1+\xi_2A_2)\right]\mathcal{F}a(\xi)\,,\end{aligned}$$
appartient à $L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)\cap L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, et tout $x\in\mathbb{R}^2$, on note alors :
$$v(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle x,\xi\rangle}\exp\left[-it(\xi_1A_1+\xi_2A_2)\right]\mathcal{F}a(\xi)\,d\xi\,. \tag{5}$$
   b) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $(v(t,\cdot):x\mapsto v(t,x))$ appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)$, et que la norme $\|v(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}$ ne dépend pas de t. Que vaut $v(0,\cdot)$?

   c) Montrer que v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, et que v est solution de l'équation aux dérivées partielles (4). (On pourra montrer que les dérivées partielles de v existent et sont continues sur $\mathbb{R}^3$.)

   d) Montrer que l'application :
$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^p)\\ t &\longmapsto \big(v(t,\cdot):x\mapsto v(t,x)\big)\,,\end{aligned}$$
   est continue.
4. Dans cette question, on suppose que les matrices A_1, et A_2 sont diagonales à coefficients réels :
$$A_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p\end{pmatrix}\,,\quad A_2=\begin{pmatrix}\beta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_p\end{pmatrix}\,.$$
Montrer que la k-ième coordonnée de la solution v définie par (5), vérifie :
$$v_k(t,x_1,x_2)=a_k(x_1-\alpha_k t,x_2-\beta_k t)\,,$$
où a_k est la k-ième coordonnée de a.
5. Dans cette question, on suppose que les matrices A_1, et A_2 sont hermitiennes, et qu'elles commutent. Donner une expression simple de la solution v définie par (5).

III. Stabilité de schémas aux différences finies

Dans cette partie, on étudie des approximations des solutions de (4). On garde les notations de la partie II. En particulier, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier, et $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sont deux matrices hermitiennes. On introduit des pas de discrétisation $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2$, tous strictement positifs, et on définit :

$$\lambda_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x_2}.$$

On approche la solution de (4) par une fonction constante par morceaux v :

$$\forall (t,x) \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[\times \Omega_{j,k}, \quad v(t,x) = v^n_{j,k},$$
$$\text{où } \Omega_{j,k} = [j\Delta x_1, (j+1)\Delta x_1[\times [k\Delta x_2, (k+1)\Delta x_2[,$$

avec $n \in \mathbb{N}$, et $j, k \in \mathbb{Z}$. On se fixe $a \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$, et on "initialise" la solution approchée v en posant :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, \quad v^0_{j,k} = \frac{1}{\Delta x_1 \, \Delta x_2} \int_{\Omega_{j,k}} a(x)\, dx. \tag{6}$$

1. Dans cette question, on suppose que les $v^n_{j,k}$ sont définis par la récurrence suivante :

$$\forall (n,j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad v^{n+1}_{j,k} = \frac{1}{4}\left(v^n_{j-1,k} + v^n_{j+1,k} + v^n_{j,k-1} + v^n_{j,k+1}\right)$$
$$- \frac{\lambda_1}{2} A_1 \left(v^n_{j+1,k} - v^n_{j-1,k}\right) - \frac{\lambda_2}{2} A_2 \left(v^n_{j,k+1} - v^n_{j,k-1}\right). \tag{7}$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note v^n la fonction constante par morceaux sur $\mathbb{R}^2$, valant $v^n_{j,k}$ sur le pavé $\Omega_{j,k}$. Montrer que l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|v^0(x)\|^2\, dx \le \int_{\mathbb{R}^2} \|a(x)\|^2\, dx,$$

et que pour tout entier n, on a $v^n \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$.

b) Vérifier qu'il existe neuf matrices $\mathbb{A}_{\ell,m}$, $\ell, m \in \{-1, 0, 1\}$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad v^{n+1}(x) = \sum_{\ell,m=-1}^{1} \mathbb{A}_{\ell,m}\, v^n\big(x + (\ell\Delta x_1, m\Delta x_2)\big),$$

et donner l'expression des matrices $\mathbb{A}_{\ell,m}$ en fonction de λ_1, λ_2, A_1, et A_2.

c) Montrer que si $u \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ et si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{F}(Mu) = M\mathcal{F}u$. En déduire qu'il existe une application $G_\sharp : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}v^{n+1}(\xi) = G_\sharp(\xi)\, \mathcal{F}v^n(\xi).$$

d) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, la matrice $G_\sharp(\xi)$ est normale.

e) Montrer que si α est un réel positif, et si H est une matrice hermitienne telle que $\|H\| \le \alpha$, alors $\alpha I - H$ est une matrice hermitienne positive. Donner une condition suffisante sur λ_1, et λ_2 pour que $I - G_\sharp(\xi)^* G_\sharp(\xi)$ soit une matrice hermitienne positive pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$. On pourra utiliser, aprés l'avoir justifiée, la formule suivante :

$$1 - \frac{1}{4}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 = \frac{1}{2}(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2) + \frac{1}{4}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2.$$

f) Sous la condition trouvée à la question 1e), montrer que $\|G_\sharp(\xi)\| \leq 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$. En déduire que pour tout entier n, on a l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|v^n(x)\|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \|a(x)\|^2 \, dx \, .$$

On dit alors que le schéma (7) est L^2-stable.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $D^2 f(x)$ soit positive. Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^2$, on a :

$$\max_{x \in K} f(x) = \max_{x \in \partial K} f(x) \, .$$

3. Soit $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, et soit alors $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice unitaire qui diagonalise H :

$$U^* \, H \, U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p \end{pmatrix} .$$

On définit une matrice, notée $|H|$, par la formule suivante :

$$U^* \, |H| \, U = \begin{pmatrix} |\alpha_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\alpha_p| \end{pmatrix} .$$

Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la matrice unitaire U diagonalisant H. Montrer que $|H|$, $|H| - H$, et $|H| + H$ sont des matrices hermitiennes positives.

4. Dans cette question, on suppose que les $v_{j,k}^n$ sont définis par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} &\forall \, (n,j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \, , \\ &\qquad v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^n - \frac{\lambda_1}{2} A_1 \left(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n \right) - \frac{\lambda_2}{2} A_2 \left(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n \right) \\ &\qquad - \frac{\lambda_1}{2} |A_1| \left(2 v_{j,k}^n - v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n \right) - \frac{\lambda_2}{2} |A_2| \left(2 v_{j,k}^n - v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n \right) \, , \quad (8) \end{aligned}$$

où les matrices $|A_1|$, $|A_2|$ sont définies comme à la question 3, et les $v_{j,k}^0$ sont donnés par (6).

a) Montrer, comme à la question 1, qu'il existe neuf matrices $\mathbb{B}_{\ell,m}$, $\ell, m \in \{-1, 0, 1\}$, telles que :

$$\forall \, n \in \mathbb{N} \, , \forall \, x \in \mathbb{R}^2 \, , \quad v^{n+1}(x) = \sum_{\ell,m=-1}^{1} \mathbb{B}_{\ell,m} \, v^n \big(x + (\ell \Delta x_1, m \Delta x_2) \big) \, ,$$

et donner l'expression des matrices $\mathbb{B}_{\ell,m}$ en fonction de λ_1, λ_2, A_1, et A_2.

b) En déduire qu'il existe une application $G_\flat : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall \, n \in \mathbb{N} \, , \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^2 \, , \quad \mathcal{F} v^n(\xi) = G_\flat(\xi)^n \, \mathcal{F} v^0(\xi) \, ,$$

et donner l'expression de la matrice $G_\flat(\xi)$. Pour simplifier cette expression, on introduira les angles moitié :

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 \Delta x_1}{2} \, , \quad \eta_2 = \frac{\xi_2 \Delta x_2}{2} \, .$$

c) Soit $u \in \mathbb{C}^p$ de norme 1. En définissant les quantités :

$$y_1 = \lambda_1 \langle u, |A_1| u\rangle\,, \quad y_2 = \lambda_2 \langle u, |A_2| u\rangle\,,$$

montrer que l'on a l'inégalité :

$$\Big[\lambda_1 \sin(2\eta_1)\langle u, A_1 u\rangle + \lambda_2 \sin(2\eta_2)\langle u, A_2 u\rangle\Big]^2 \leq \big(y_1|\sin(2\eta_1)| + y_2|\sin(2\eta_2)|\big)^2\,,$$

puis que l'on a :

$$\begin{aligned}|\langle u, G_\flat(\xi)u\rangle|^2 \leq 1 + 4(y_1^2 - y_1)\sin^2\eta_1 + 4(y_2^2 - y_2)\sin^2\eta_2 \\ + 2y_1y_2\big(4\sin^2\eta_1\,\sin^2\eta_2 + |\sin(2\eta_1)\,\sin(2\eta_2)|\big)\,.\end{aligned}$$

d) En utilisant la question 2, montrer que pour tout couple de réels (x_1, x_2) vérifiant $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, et $x_1 + x_2 \leq 1$, on a :

$$4(x_1^2-x_1)\sin^2\eta_1+4(x_2^2-x_2)\sin^2\eta_2+2x_1x_2\big(4\sin^2\eta_1\,\sin^2\eta_2+|\sin(2\eta_1)\,\sin(2\eta_2)|\big) \leq 0\,.$$

e) Montrer que si λ_1, et λ_2 vérifient :

$$\lambda_1\,\|A_1\| + \lambda_2\,\|A_2\| \leq 1\,,$$

alors la famille $\mathcal{A} = \{G_\flat(\xi), \xi \in \mathbb{R}^2\}$ vérifie la propriété (3) de la partie I. En déduire qu'il existe un réel positif C tel que pour tout entier n, on a l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|v^n(x)\|^2\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \|a(x)\|^2\,dx\,.$$

On dira que le schéma (8) est L^2-stable.

Fin de l'épreuve