A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Aucun document personnel n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Le sujet comporte 6 pages

-I-

Soit S un ensemble de cardinal fini d. Soit Q la matrice de transition d'une chaine de Markov sur S. Nous supposerons que cette chaine est irréductible, apériodique et qu'elle est réversible par rapport à une mesure de probabilité π sur S, soit que pout tout x et y dans S,

$$\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x).$$

Nous munissons $\mathbb{R}^S$, l'ensemble des applications de S dans $\mathbb{R}$, du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_\pi = \sum_{x\in S} u(x)v(x)\pi(x),$$

pour u et v dans $\mathbb{R}^S$. Nous notons $\|u\|_\pi = \langle u, u\rangle_\pi^{1/2}$, la norme de u associée à ce produit scalaire. Pour $u \in \mathbb{R}^S$, on définit $Qu \in \mathbb{R}^S$ et $\pi(u) \in \mathbb{R}$ par

$$Qu(x) = \sum_{y\in S} Q(x,y)u(y) \quad \text{et} \quad \pi(u) = \sum_{x\in S} u(x)\pi(x).$$

Nous notons $\mathbf{1}$ la fonction de $\mathbb{R}^S$ définie par $\mathbf{1}(x) = 1$ pour tout $x \in S$.

I-1) **a)** Montrer que π est une mesure de probabilité invariante pour Q. Peut-on avoir $\pi(x) = 0$?

b) Vérifier que $\varphi : \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u,v) = \langle Qu, v\rangle_\pi$ est une forme bilinéaire symétrique. En déduire qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ de $\mathbb{R}^S$, orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$ et une suite croissante de réels $(\beta_i)_{1\leq i\leq d}$ telles que pour tout i, $Qe_i = \beta_i e_i$.

c) Montrer que $\beta_d = 1$, $e_d = \mathbf{1}$ et que pour tout $i \leq d-1$, $|\beta_i| < 1$.

I-2) Posons $\lambda(Q) = 1 - \sup\{|\beta_1|, \beta_{d-1}\}$. Soient $x \in S$ et X_n^x une chaine de Markov de matrice de transition Q et de position initiale x. Pour tout $u \in \mathbb{R}^S$, on pose $u_n(x) = \mathsf{E}[u(X_n^x)]$

a) Exprimer $u_n(x)$ en fonction de u, de x et de Q. En déduire que

$$\|u_n - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi \leq (1 - \lambda(Q))^n \|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi.$$

b) Pour $n \geq 1$ et $x \in S$, trouver $v_{n,x} \in \mathbb{R}^S$ tel que

$$u_n(x) - \pi(u) = \langle v_{n,x}, u_{n-1} - \pi(u)\mathbf{1}\rangle_\pi.$$

En déduire que pour tout $x \in S$ et tout $n \geq 1$,

$$|u_n(x) - \pi(u)| \leq \left(\frac{Q^2(x,x)}{\pi(x)}\right)^{1/2} (1 - \lambda(Q))^{n-1} \|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi.$$

c) On pose $c = \sup_{x \in S} \left(\frac{Q^2(x,x)}{\pi(x)}\right)^{1/2}$. Soit X_n une chaine de Markov de matrice de transition Q. Montrer que pour tout $y \in S$,

$$|\mathsf{P}(X_n = y) - \pi(y)| \leq c(1 - \lambda(Q))^{n-1}.$$

I-3) **a)** Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^S$,

$$\|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi^2 = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} (u(x) - u(y))^2 \pi(x)\pi(y).$$

b) Montrer que pour x et y dans S, il existe un chemin $\gamma_{x,y} = (x_0, \ldots, x_k)$ tel que $k \leq d$, $x_0 = x$, $x_k = y$, $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^S$,

$$(u(y) - u(x))^2 \leq d \sum_{i=1}^{k} (u(x_i) - u(x_{i-1}))^2.$$

c) Soit $A(Q) = \{(s_1, s_2) \in S^2 : \; Q(s_1, s_2) > 0 \text{ et } s_1 \neq s_2\}$. On dit que $(s_1, s_2) \in \gamma_{x,y} = (x_0, \ldots, x_k)$ si il existe i tel que $s_1 = x_{i-1}$ et $s_2 = x_i$. On pose

$$C = d \times \sup_{\{(s_1,s_2) \in A(Q)\}} \left\{ \frac{1}{\pi(s_1)Q(s_1,s_2)} \sum_{\{x,y \in S:\; (s_1,s_2) \in \gamma_{x,y}\}} \pi(x)\pi(y) \right\}.$$

Montrer que

$$\|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi^2 \leq \frac{C}{2} \sum_{\{(s_1,s_2) \in A(Q)\}} (u(s_1) - u(s_2))^2 \pi(s_1) Q(s_1, s_2).$$

d) Montrer que

$$\langle u - Qu, u\rangle_\pi = \frac{1}{2} \sum_{\{(s_1,s_2)\in A(Q)\}} (u(s_1) - u(s_2))^2 \pi(s_1) Q(s_1, s_2).$$

e) Montrer que $\beta_{d-1} \leq 1 - 1/\sqrt{C}$, puis que $\lambda(Q) \geq \inf\{1 - |\beta_1|, 1/\sqrt{C}\}$.

–II–

Soit S un ensemble de cardinal fini d et A un ensemble d'arêtes de S. Une arête a est la donnée de deux points distincts x et y de S. On notera alors $a = (x, y)$. Nous supposerons que si $(x, y) \in A$ alors $(y, x) \in A$. La donnée de S et de A est un graphe. Une partie C de ce graphe est dite connexe si pour tout x et y dans C il existe une suite $s_0, \ldots, s_n$ dans C telle que $s_0 = x$, $s_n = y$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $(s_{i-1}, s_i) \in A$. Nous supposerons que S est connexe. On dit x et y sont voisins si $(x, y) \in A$. Pour tout $x \in S$, on note $n(x)$ le nombre de voisins de x. Nous supposerons qu'il existe un entier $r > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $n(x) = r$. On note $\mathcal{V}(x) = \{x^1, \ldots, x^r\}$, l'ensemble des voisins de x.

On se donne une fonction $H : S \to \mathbb{R}$. On note $H_{min} = \inf_{x\in S} H(x)$, $H_{max} = \sup_{x\in S} H(x)$ et $S_m = \{x \in S : \; H(x) = H_{min}\}$. Nous supposerons que $H_{min} = 0$ et que $H_{max} > 0$.

Soient X_0 une variable aléatoire à valeurs dans S, $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes. Nous supposerons que pour tout n, la loi de U_n est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, r\}$, la loi de V_n est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous supposerons également que la variable aléatoire X_0, la suite (U_n) et la suite (V_n) sont indépendantes.

Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, sur l'événement $\{U_{n+1} = i\}$,

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^i & \text{si} \quad H(X_n^i) \leq -T_n \log(V_{n+1}) + H(X_n); \\ X_{n+1} = X_n & \text{si} \quad H(X_n^i) > -T_n \log(V_{n+1}) + H(X_n). \end{cases}$$

–II-A–

On suppose dans cette partie que $T_n = T$, où T est un paramètre strictement positif. Posons $Z_T = \sum_{x\in S} \exp(-H(x)/T)$. Soit π_T, la mesure de probabilité sur S, définie par

$$\pi_T(x) = \frac{1}{Z_T} \exp\left(-\frac{H(x)}{T}\right).$$

A-1) **a)** Montrer que X_n est une chaine de Markov. La matrice de transition de cette chaine sera notée Q_T.

b) Montrer que $Q_T(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin A$. Montrer que si $(x,y) \in A$,

$$\begin{aligned} Q_T(x,y) &= \frac{1}{r}\exp\left(-\frac{1}{T}(H(y)-H(x))\right) \qquad \text{si} \quad H(y) > H(x); \\ Q_T(x,y) &= \frac{1}{r} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si} \quad H(y) \leq H(x). \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $Q_T(x,x) > 0$.

c) Montrer que cette chaine est réversible par rapport à la mesure π_T.

d) Montrer que cette chaine est irréductible et apériodique.

e) Montrer que cette chaine est récurrente positive et que X_n converge en loi quand n tend vers ∞.

A-2) **a)** Montrer que π_T converge étroitement quand $T \to +\infty$. Calculer $Q_\infty = \lim_{T\to\infty} Q_T$. Est-ce une matrice de transition? Décrire la chaine associée. Admet-elle une mesure de probabilité invariante? Est-elle récurrente? Est-elle irréductible?

b) Soient x et y tels que $H(x) < H(y)$. Montrer que $\lim_{T\to 0}\frac{\pi_T(y)}{\pi_T(x)} = 0$.

c) Montrer que π_T converge étroitement quand $T \to 0$ vers la mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble S_m. Calculer $Q_0 = \lim_{T\to 0} Q_T$. Est-ce une matrice de transition? Décrire la chaine associée. Admet-elle une mesure de probabilité invariante? Est-elle récurrente? Est-elle irréductible?

A-3) Montrer que les valeurs propres de Q_0 sont toutes positives. En déduire qu'il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T < T_0$, les valeurs propres de Q_T sont toutes supérieures à $-1/2$.

A-4) Soit $T \in]0, T_0[$. Nous reprenons les notations de la question I-3: Pour tout x et y dans S, on définit un chemin $\gamma_{x,y} = \{x_0, \dots, x_k\}$.

a) Vérifier que $A(Q_T) = A$.

b) Montrer que pour tout $(s_1, s_2) \in A$,

$$\frac{1}{\pi_T(s_1)Q_T(s_1,s_2)} \leq dZ_T \exp\left(\frac{H_{max}}{T}\right).$$

c) Soit $(s_1,s_2) \in A$, montrer que

$$\frac{1}{\pi_T(s_1)Q_T(s_1,s_2)} \sum_{\{(x,y)\in S^2:\ (s_1,s_2)\in\gamma_{x,y}\}} \pi_T(x)\pi_T(y) \leq d^2 \exp\left(\frac{H_{max}}{T}\right).$$

d) Montrer que $\lambda(Q_T) \geq \inf\left\{1/2, d^{-3/2}\exp\left(-\frac{H_{max}}{2T}\right)\right\}$.

–II-B–

Pour $k \geq 1$, notons n_k la partie entière de e^{kL}, où L est une constante strictement supérieure à $\frac{1}{2}H_{max}$. Dans cette partie, la suite T_n est définie telle que $T_n = 1/k$ si $n_{k-1} < n \leq n_k$.

B-1) Pour tout entier k, on pose $c_k = \sup_{x\in S}\left(\frac{1}{\pi_{1/k}(x)}\right)^{1/2}$. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que pour tout $(x,y) \in S^2$ et tout $k \geq k_0$,

$$|\mathsf{P}(X_{n_k} = y | X_{n_{k-1}} = x) - \pi_{1/k}(y)| \leq c_k\left(1 - d^{-3/2}e^{-kH_{max}/2}\right)^{(n_k - n_{k-1} - 1)}$$

B-2) Montrer que $\pi_{1/k}(x) \geq \frac{1}{d}e^{-kH_{max}}$.

B-3) Montrer que X_{n_k} converge en loi quand $k \to \infty$. Quelle est la loi limite?

B-4) Montrer que si $S_m = \{x^*\}$, alors X_{n_k} converge en probabilité vers x^*.

–II-C–

Soit $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in A$, on a $|H(x) - H(y)| \geq \alpha$ si $H(x) \neq H(y)$. Dans cette partie, (T_n) est une suite telle que pour tout $n \geq 1$, $T_n \leq \alpha$ et $\sum_n e^{-\alpha/T_n} < \infty$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k :\ 0 \leq k \leq n)$. On pose S_{loc}, l'ensemble des minima locaux de H:

$$S_{loc} = \{x \in S :\ H(x) \leq H(y) \quad \forall y \in \mathcal{V}(x)\}.$$

On note A_X, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite X_n (on rappelle que $x \in A_X$ si et seulement si $X_n = x$ infiniment souvent).

C-1) Montrer que A_X est connexe.

C-2) **a)** Montrer que pour tout $v \geq \alpha$ et tout $T \leq \alpha$, on a $ve^{-v/T} \leq \alpha e^{-\alpha/T}$.

b) Montrer que $Z_n = H(X_n) - \sum_{k=1}^{n-1}\alpha e^{-\alpha/T_k}$ est une surmartingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $H(X_n)$ converge presque sûrement et dans $L^1(\mathsf{P})$.

C-3) Soit $x \notin S_{loc}$. Définissons la suite de temps d'arrêt τ_n par (on utilise la convention $\inf\emptyset = \infty$)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 0 :\ X_n = x \text{ et } \forall k \geq n,\ H(X_k) = H(x)\} \\ \tau_{n+1} &= \inf\{k \geq \tau_n + 1 :\ X_k = x\} \qquad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

a) Montrer que presque sûrement, $x \in A_X \implies \forall n \geq 1,\ \tau_n < \infty$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathsf{P}(H(X_{\tau_n+1}) < H(x)) \geq \frac{1}{r}$.

c) Montrer que presque sûrement, $x \notin A_X$. En déduire que presque sûrement, $A_X \subset S_{loc}$.

C-4) Montrer que si pour tout $x \in S_{loc}$, et tout $y \in \mathcal{V}(x)$, on a $H(y) > H(x)$, alors X_n converge presque sûrement.

–III–

Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$\sup_{\{x\in\mathbb{R}\}} |H''(x)| < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{|x|\to\infty} H(x) = \infty.$$

On note $E = \{x \in \mathbb{R} : H'(x) = 0\}$. On suppose que E est un ensemble fini. Soient γ_n et σ_n deux suites de réels positifs décroissantes vers 0. Nous supposerons que

$$\sum_n \gamma_n = \infty \quad \text{et} \quad \sum_n \sigma_n^2 < \infty.$$

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et (ϵ_n) une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que X_0 est indépendante de la suite (ϵ_n). Nous supposerons que $\mathsf{E}[X_0^2] < \infty$ et que pour tout $n \geq 1$, ϵ_n est une variable aléatoire centrée de variance σ_n^2. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(\epsilon_k : k \leq n)$. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$X_{n+1} = X_n - \gamma_{n+1} H'(X_n) + \epsilon_{n+1}.$$

III-1) **a)** Montrer qu'il existe une constante $A \in]0,\infty[$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|H(x)| \leq A(1+x^2)$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $H(X_n) \in L^1(\mathsf{P})$.

III-2) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0,\infty[$ et un entier N tels que pour tout $n \geq N$,

$$\mathsf{E}[H(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \leq H(X_n) - \frac{\gamma_{n+1}}{2}(H'(X_n))^2 + C\sigma_{n+1}^2.$$

III-3) Montrer que $H(X_n)$ converge presque sûrement.

III-4) Montrer que $\mathsf{E}[\sum_n \gamma_{n+1}(H'(X_n))^2] < \infty$. En déduire que presque sûrement, $\sum_n \gamma_{n+1}(H'(X_n))^2 < \infty$.

III-5) Montrer que X_n converge presque sûrement et que $\lim_{n\to\infty} X_n \in E$.

Fin de l'épreuve