3è ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 HEURES

L'usage de toute calculatrice est interdit

Aucun document personnel n'est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 6 pages

Rappels et notations

On admettra sans démonstration les résultats suivants qui concernent la *transformation de Laplace* d'une fonction d'une variable. Soit $\nu \in [0, +\infty[$ et $g : \Omega_\nu \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Omega_\nu = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \nu\}$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|g(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}, \quad \text{pour tout } z \in \Omega_\nu . \tag{1}$$

Etant donné $x \in \mathbb{R}$, $x > \nu$, on définit $G : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathrm{e}^{tz} g(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t(x+iy)} g(x+iy)\,\mathrm{d}y\,, \quad t \geq 0\,. \tag{2}$$

Alors $G : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ est une fonction continue, qui ne dépend pas du choix de l'abscisse $x > \nu$ du chemin d'intégration dans (2). En outre, pour tout réel $\mu > \nu$, il existe une constante $C_\mu > 0$ telle que $|G(t)| \leq C_\mu \mathrm{e}^{\mu t}$ pour tout $t \geq 0$. Enfin,

$$g(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} G(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{pour tout } z \in \Omega_\nu\,. \tag{3}$$

On dit que g est la *transformée de Laplace* de la fonction G, et G la *transformée de Laplace inverse* de g. En particulier, si $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$g(z) = \frac{1}{z^{k+1}}\,, \quad \text{alors} \quad G(t) = \frac{t^k}{k!}\,.$$

Dans cet exemple, on peut prendre $\nu = 0$.

Dans le problème ci-dessous, on utilise la détermination suivante du logarithme d'un nombre complexe. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe $\phi \in \left]-\pi, \pi\right]$ unique tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\phi}$; on pose alors $\ln(z) = \ln(|z|) + i\phi$. Ainsi définie, la fonction $z \mapsto \ln(z)$ est holomorphe dans le plan complexe privé de la demi-droite $\left]-\infty, 0\right]$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et si $\alpha > 0$, on note $z^\alpha = \exp(\alpha \ln(z)) = |z|^\alpha\, e^{i\alpha\phi}$.

Enfin, on rappelle la *formule de Stirling* pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! \;=\; n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\Big(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n})\Big)\ , \quad \text{lorsque } n \to +\infty\ . \tag{4}$$

Première partie

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide dont l'adhérence $\overline{\Omega}$ contient l'origine, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit qu'une suite $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est un *développement asymptotique* de la fonction f à l'origine (dans le domaine Ω) si, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\limsup_{\substack{z\to 0\\ z\in\Omega}} \frac{1}{|z|^n}\Big|f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\Big| \;<\; \infty\ .$$

(Si $n = 0$, la somme sur k est nulle par convention.) En d'autres termes, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + R_n(z)\ , \tag{5}$$

et il existe une constante $C_n > 0$ telle que

$$|R_n(z)| \;\leq\; C_n |z|^n \tag{6}$$

pour tout $z \in \Omega \setminus \{0\}$ suffisamment petit.

I.1) Montrer que, si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ possède un développement asymptotique à l'origine (dans le domaine Ω), alors ce développement est unique.

I.2) Pour tout réel $R > 0$, on définit

$$D_R \;=\; \Big\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,\, \mathrm{Re}\frac{1}{z} > \frac{1}{R}\Big\}\ . \tag{7}$$

Vérifier que $D_R \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert dont la frontière contient l'origine. Préciser le centre et le rayon de ce disque.

I.3) Soient R et α des réels strictement positifs. On considère la fonction $f_\alpha : D_R \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_\alpha(z) \;=\; \exp\Big(-\frac{1}{z^\alpha}\Big)\ , \quad z \in D_R\ . \tag{8}$$

Si $\alpha \geq 1$, vérifier que $f_\alpha(z)$ ne possède pas de limite lorsque $z \to 0$ dans D_R, et en déduire que f_α n'admet pas de développement asymptotique à l'origine (dans le domaine D_R).

I.4) Si $0 < \alpha < 1$, montrer que la fonction $f_\alpha : D_R \to \mathbb{C}$ définie à la question précédente possède dans le domaine D_R un développement asymptotique à l'origine *identiquement nul* ($a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$). En déduire que deux fonctions différentes peuvent avoir le même développement asymptotique.

Deuxième partie

Dans cette partie et la suivante, on montre que l'on peut reconstruire, sous certaines conditions, une fonction holomorphe dans un disque du plan complexe à partir de son développement asymptotique en un point du bord.

Soit R un réel strictement positif, et soit $f : D_R \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans le disque D_R défini par (7). On suppose que f possède un développement asymptotique à l'origine de la forme (5), et qu'il existe des constantes réelles $A > 0$ et $\rho > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n(z)| \le A\rho^n n! |z|^n , \quad \text{pour tout } z \in D_R . \tag{9}$$

(Si $n = 0$, alors $n! = 1$ par convention.)

II.1) Montrer que les coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ du développement asymptotique de f vérifient $|a_k| \le A\rho^k k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que la série entière

$$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \tag{10}$$

converge absolument pour $|z| < 1/\rho$. La fonction holomorphe B définie par (10) est appelée la *transformée de Borel* de la série formelle $\sum a_k z^k$.

II.2) Soit $\nu = 1/R$, et $\Omega_\nu = \{z \in \mathbb{C}\,,\, \mathrm{Re}(z) > \nu\}$. Vérifier que la fonction $g : \Omega_\nu \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{1}{z}\Big(f(1/z) - a_0\Big) , \quad z \in \Omega_\nu , \tag{11}$$

est holomorphe dans Ω_ν et vérifie (1). On peut donc définir une fonction $b : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$b(t) = a_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathrm{e}^{tz} \frac{1}{z}\Big(f(1/z) - a_0\Big)\,\mathrm{d}z , \quad t \ge 0 , \tag{12}$$

où $x > \nu$ est une abscisse réelle quelconque.

II.3) Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|b(t)| \le K\,\mathrm{e}^{\nu t} \quad \text{pour tout } t \ge 0 . \tag{13}$$

En utilisant les résultats sur la transformation de Laplace rappelés ci-dessus, vérifier que

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t/z} b(t)\,\mathrm{d}t , \quad \text{pour tout } z \in D_R . \tag{14}$$

II.4) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b(t) \,=\, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!}\, t^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathrm{e}^{tz} \frac{1}{z} R_n(1/z)\, \mathrm{d}z \ , \quad t \geq 0 \ , \tag{15}$$

où $R_n(z)$ est défini par (5).

II.5) Montrer que, pour tout réel $x > 0$ et tout réel $s \geq 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^s}\, \mathrm{d}y \,\leq\, \frac{\pi}{x^{2s-1}} \ .$$

II.6) Si $t \geq 0$ et si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n > \nu t$, montrer que

$$\left| \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathrm{e}^{tz} \frac{1}{z} R_n(1/z)\, \mathrm{d}z \right| \,\leq\, \pi A \frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n} (\rho t)^n \ .$$

Indication : Si $t > 0$, on choisira $x = n/t$ comme abscisse d'intégration.

En utilisant la formule de Stirling (4), en déduire que

$$b(t) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\, t^k \,\equiv\, B(t) \ , \quad \text{pour } 0 \leq t < 1/\rho \ .$$

Troisième partie

On reprend les notations de la partie précédente.

III.1) Soit $m \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression (15) avec $n = m+1$, montrer que la fonction $b : [0, +\infty[\,\to \mathbb{C}$ est de classe C^m et que

$$b^{(m)}(t) \,=\, a_m + \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathrm{e}^{tz} z^{m-1} R_{m+1}(1/z)\, \mathrm{d}z \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

où $x > \nu$ est une abscisse réelle quelconque. En déduire que la fonction $b : [0, +\infty[\,\to \mathbb{C}$ est de classe C^∞.

III.2) Montrer qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$|b^{(m)}(t)| \,\leq\, K' \rho^{m+1} (m+1)!\, \mathrm{e}^{\nu t} \ , \quad \text{pour tout } t \geq 0 \ .$$

III.3) En déduire que, pour tout $t_0 \in [0, +\infty[$, la série de Taylor

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^{(m)}(t_0)}{m!} (t - t_0)^m$$

converge absolument pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t - t_0| < 1/\rho$, et que sa somme coïncide avec $b(t)$ lorsque $t \geq 0$ et $|t - t_0| < 1/\rho$.

III.4) En déduire que la fonction B définie par la série entière (10) se prolonge en une fonction holomorphe dans le domaine

$$S_\rho \;=\; \{z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{dist}(z,\mathbb{R}_+) < 1/\rho\}\ ,$$

où $\mathrm{dist}(z,\mathbb{R}_+) = \min\{|z-t|\,,\, t \geq 0\}$. On notera encore b le prolongement holomorphe de B à S_ρ.

On a ainsi démontré le *théorème de Watson-Nevanlinna*: si $f\,:\,D_R \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe possédant un développement asymptotique de la forme (5) dont le reste vérifie l'estimation (9), alors la fonction B définie par la série entière (10) se prolonge en une fonction holomorphe b dans le domaine S_ρ, et la fonction f peut être reconstruite à partir de b par la formule (14).

III.5) Soient $R > 0$ et $0 < \alpha < 1$. On considère à nouveau la fonction $f_\alpha\,:\,D_R \to \mathbb{C}$ définie par (8). On sait de la question I.4 que f_α possède dans D_R un développement asymptotique de la forme (5), (6), avec $a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$ est assez grand, montrer que

$$\sup_{z\in D_R} \frac{1}{|z|^n}\,|f_\alpha(z)| \;\geq\; \sup_{0<r<R}\Big(\frac{1}{r^n}\,\mathrm{e}^{-1/r^\alpha}\Big) \;=\; \Big(\frac{n}{\alpha}\Big)^{n/\alpha}\mathrm{e}^{-n/\alpha}\ .$$

En déduire que le reste R_n du développement asymptotique de f_α ne vérifie pas l'estimation (9), quelles que soient les constantes A et ρ.

Quatrième partie

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On considère la fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-zx^2}\,\mathrm{d}x\ , \quad z \in \overline{\Omega}\ . \tag{16}$$

IV.1) Montrer que f est continue dans le demi-plan fermé $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans le demi-plan ouvert Ω.

IV.2) Montrer que, pour tout $z \in \overline{\Omega}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big|\mathrm{e}^{-z} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-z)^k}{k!}\Big| \;\leq\; \frac{|z|^n}{n!}\ .$$

IV.3) Soit R un réel strictement positif. Montrer que la fonction f possède dans le domaine D_R défini par (7) un développement asymptotique de la forme (5), dont on précisera les coefficients a_k. Montrer que le reste de ce développement vérifie l'estimation (9) avec $A = 1$ et $\rho = 4$.

IV.4) Vérifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k z^k$ est nul. En revanche, montrer que la série entière (10) converge dans le disque $\{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1/4\}$ et que

$$B(z) \;=\; \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!}\,z^k \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\ , \quad |z| < 1/4\ .$$

IV.5) En appliquant le théorème de Watson-Nevanlinna (cf. la question III.4), en déduire que

$$f(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/z}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,\mathrm{d}t\,, \quad z \in \Omega\,. \tag{17}$$

Lorsque z est un réel strictement positif, vérifier directement que les expressions (16) et (17) définissent bien le même réel $f(z)$.

Fin de l'épreuve