C35122

B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Aucun document personnel n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

1 Recherche de valeurs propres pour une matrice tridiagonale hermitienne

Soit n un entier naturel strictement positif. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et I_n la matrice identité d'ordre n.
Considérons $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_{n-1}$ des nombres complexes tels que $a_i = \overline{a}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (en désignant par $\overline{a}_i$ le complexe conjugué de a_i) et $b_i \neq 0$ pour tout $i = 1 \ldots, n-1$.
On note T_n la matrice à coefficients complexes d'ordre n suivante :

$$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ \overline{b}_1 & a_2 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \overline{b}_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & \overline{b}_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

La matrice T_n est dite tridiagonale hermitienne.

1. Pour $1 \leq k \leq n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $P_k(t)$ le déterminant de la matrice $T_k - tI_k$ (P_k est appelé polynôme caractéristique de la matrice T_k) et on pose $P_0 = 1$.

(a) Calculer P_1.

(b) Démontrer, pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$, la relation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_k(t) = (a_k - t)P_{k-1}(t) - |b_{k-1}|^2 P_{k-2}(t). \tag{1.2}$$

(c) Montrer que le polynôme P_k est à coefficients réels pour tout $1 \leq k \leq n$.

(d) Montrer que $\lim_{t \to -\infty} P_k(t) = +\infty$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

(e) Montrer que pour $1 \leq k \leq n$, les zéros du polynôme P_k sont réels.

(f) Montrer que pour $2 \leq k \leq n$, les polynômes P_k et P_{k-1} n'ont pas de zéro commun. Plus précisément, montrer que pour tout $2 \leq k \leq n-1$, si λ est un zéro de P_k, alors $P_{k-1}(\lambda)P_{k+1}(\lambda) < 0$.

(g) En déduire que pour $1 \leq k \leq n-1$, le polynôme P_k possède k racines distinctes qui séparent les $k+1$ racines du polynôme P_{k+1}.

2. Nous allons déterminer un minorant de la plus petite valeur propre de T_n et un majorant de la plus grande. Soit $||.||_\infty$ la norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$||x||_\infty = \max_i |x_i|.$$

On définit la norme matricielle associée pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$||P||_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{||Px||_\infty}{||x||_\infty}.$$

(a) Soient P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de la matrice P qui n'est pas valeur propre pour la matrice Q.
Montrer que :

$$1 \leq ||(\lambda I_n - Q)^{-1}(P - Q)||_\infty \leq ||(\lambda I_n - Q)^{-1}||_\infty \, ||P - Q||_\infty.$$

(b) Notons $p_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ les coefficients de la matrice P. En choisissant pour Q la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{nn} \end{pmatrix},$$

montrer que les valeurs propres de P sont localisées dans une réunion de n disques dont on précisera le centre et le rayon.

(c) En déduire que les valeurs propres de T_n appartiennent à l'intervalle $[m, M]$ où :

$$m = \min_{j=1,\dots,n} (a_j - |b_{j-1}| - |b_j|) \text{ et } M = \max_{j=1,\dots,n} (a_j + |b_{j-1}| + |b_j|),$$

avec la convention $b_0 = 0$ et $b_n = 0$.

3. La suite de polynômes à coefficients réels $Q_0, Q_1, \dots, Q_m$ est dite suite de Sturm pour le polynôme Q_0 si elle vérifie les conditions suivantes :
– Toutes les racines de Q_0 sont réelles,
– Si λ est une racine de Q_0, alors $Q_1(\lambda)$ et $Q_0'(\lambda)$ sont de signe opposé,
– Pour tout $1 \leq k \leq m-1$, si λ est une racine de Q_k, alors $Q_{k-1}(\lambda)Q_{k+1}(\lambda) < 0$.
– Le polynôme Q_m n'a pas de racine réelle.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $w(x)$ le nombre de changements de signe de la suite de polynômes $Q_0(x), \ldots, Q_m(x)$ avec la convention que lorsque $Q_i(x) = 0$, le signe de $Q_i(x)$ est celui de $Q_{i+1}(x)$. Montrer que le nombre de racines du polynôme Q_0 sur l'intervalle $[a, b[$ est égal à $w(b) - w(a)$.

(b) Montrer que la suite $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0$ est une suite de Sturm pour le polynôme P_n.

4. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de T_n rangées par ordre croissant. Pour tout $j = 1 \ldots, n$, construire des suites réelles adjacentes $(c_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers λ_j quand $k \to +\infty$ et telles que $d_k^j - c_k^j = \dfrac{d_0^j - c_0^j}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Qu'en est-il si l'un des coefficients b_j pour $1 \leq j \leq n-1$, de la matrice T_n s'annule ?

2 Intégration numérique

On considère une fonction f indéfiniment dérivable sur $[a, b]$. On cherche à donner une bonne approximation de $\int_a^b f(x)dx$. Pour cela, on se donne une subdivision de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

1. (a) Proposer deux méthodes d'intégration numérique qui soient exactes pour les polynômes de degré 1.

(b) Posons $h_i = x_{i+1} - x_i$ pour tout $i = 0, \ldots, k-1$. En effectuant un changement de variables, montrer que $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h_i}{2}\int_{-1}^{1} f_i(s)ds$ avec une fonction f_i que l'on précisera.

(c) Plaçons-nous sur l'intervalle $[-1, 1]$, fixons $l > 0$ et définissons les points $\tau_j = -1 + \frac{2j}{l}$ pour $j = 0, \ldots, l$. Montrer que pour tout $i = 0, \ldots, l$, il existe un unique polynôme L_i de degré l tel que, pour tout $0 \leq j \leq l$,

$$L_i(\tau_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner l'expression des polynômes L_i, appelés polynômes de Lagrange.
Notons P_f le polynôme :

$$P_f = \sum_{j=0}^{l} f(\tau_j)L_j.$$

En approchant f par P_f, on approche $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ par

$$\sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\tau_j) \text{ avec } \omega_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)dx. \tag{2.1}$$

Que vaut $\sum_{j=0}^{l} \omega_j$? Montrer que $\omega_{l-j} = \omega_j$ pour $j = 0, \ldots, l$. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\tau_j)$$

quand f est un polynôme de degré l si l est impair et de degré $l+1$ si l est pair.

(d) Définissons les points $x_{i,j} = \dfrac{x_i + x_{i+1} + h_i \tau_j}{2}$. On définit la formule de quadrature composée :

$$T_{kl}(f) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h_i}{2} \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(x_{ij}). \tag{2.2}$$

Montrer que $T_{kl}(f)$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $\max\limits_{0 \le i \le k-1} h_i$ tend vers zéro.

(e) Calculer les formules d'intégration numérique obtenues pour $l = 1$ et $l = 2$.

2. Considérons une fonction g indéfiniment dérivable sur $[0, 1]$.

(a) Montrer que

$$\frac{1}{2}(g(0) + g(1)) = \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 B_1(x)g'(x)dx \text{ avec } B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

(b) Pour tout $j \geq 2$, on définit le polynôme B_j sur $[0, 1]$ par

$$B_j'(x) = jB_{j-1}(x) \text{ et } \int_0^1 B_j(x)dx = 0.$$

Calculer B_2.
Montrer que $B_j(0) = B_j(1)$ pour tout $j \geq 2$.
On note $b_j = B_j(0)$ pour $j \geq 2$ et on définit $b_0 = 1$ et $b_1 = -\frac{1}{2}$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g(0) + g(1)) &= \int_0^1 g(x)dx + \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \frac{b_j}{j!} \left(g^{(j-1)}(1) - g^{(j-1)}(0) \right) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} g^{(n)}(x)dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

(d) Montrer que pour tout $j \geq 1$ et tout $x \in]0, 1[$, $B_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{j} C_j^i b_i x^{j-i}$ où $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$.

(e) Montrer que $B_j(x) = (-1)^j B_j(1 - x)$ pour tout $j \geq 1$ et tout $x \in]0, 1[$.

(f) Montrer que $b_j = 0$ si j est un entier impair ≥ 3. En déduire une simplification de l'expression (2.3).

3. Soient f une fonction indéfiniment dérivable sur $[a, b]$ et k un entier naturel non nul. Notons $h = \frac{b-a}{k}$, $x_j = a + jh$ pour tout $j = 0, \ldots, k$ et

$$T_h(f) = h \left(\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_k)) + \sum_{j=1}^{k-1} f(x_j) \right). \tag{2.4}$$

On définit la fonction périodique de période 1 $\tilde{B}_n$ par $\tilde{B}_n(x) = B_n(x - [x])$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

(a) Montrer que :

$$\begin{aligned} T_h(f) &= \int_a^b f(x)dx + \sum_{j=1}^{n} h^{2j} \frac{b_{2j}}{(2j)!} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a))dx \\ &\quad - \frac{h^{2n}}{(2n)!} \int_a^b \tilde{B}_{2n} \left(\frac{x-a}{h} \right) f^{(2n)}(x)dx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

(b) En déduire qu'il existe des constantes C et h_0 telles que pour tout $0 < h < h_0$:

$$\left| T_h(f) - \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n-1} a_j h^{2j} \right| \leq Ch^{2n},$$

avec $a_j = \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\right)$ pour tout $1 \leq j \leq n-1$.

4. Nous allons maintenant déterminer une façon d'accélérer la convergence pour le calcul approché de $\int_a^b f(x)dx$. Choisissons $h = \frac{b-a}{2^m}$.

   (a) Grâce à la relation (2.5), nous prolongeons la définition $T_h(f)$ à tout réel h strictement positif. Définissons la fonction A sur $]0, +\infty[$ par $A(t) = T_{\sqrt{t}}(f)$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $(R_j)_j$, de coefficients $(a_j)_j$, dont on donnera l'expression, et de réels $(C_j)_j$ telles que pour tout n,

   $$A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + R_n(t) \text{ avec } |R_n(t)| \leq C_n t^n, \forall t > 0.$$

   (b) Soient $t_0 > 0$ un réel et $(n_j)_{j\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers avec $n_0 = 1$. Pour tout $j \geq 0$ et tout $m \geq j$, on note $t_j = \frac{t_0}{n_j}$ et $P_{m,j}$ le polynôme de degré au plus j tel que $P_{m,j}(t_l) = A(t_l)$ pour $l = m-j, m-j+1, \ldots, m$. On définit alors :

   $$A_{m,j} = P_{m,j}(0), \forall m \geq j \geq 0.$$

   Comparer $P_{m,j}(t) - \frac{t - t_m}{t_{m-j-1} - t_m}(P_{m,j}(t) - P_{m-1,j}(t))$ et $P_{m,j+1}(t)$ pour $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $A_{m,j+1}$ en fonction de $A_{m,j}$, $A_{m-1,j}$, n_m et n_{m-j-1}.

   (c) On choisit $n_j = 4^j$, pour tout $j \geq 0$. En posant $h = \frac{b-a}{2^m}$ et en reprenant (2.5), montrer que :

   $$\begin{aligned} A_{m,0} &= T_h(f), \forall m \geq 0 \\ A_{m,n} &= \frac{4^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{4^n - 1}, \forall m > n \geq 0. \end{aligned}$$

   Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\left| A_{m,n} - \int_a^b f(x)dx \right| \leq Ch^{2n+2}$.

   Vérifier que $A_{m,1}$ permet de retrouver la formule (2.2) pour $l = 2$, dite formule de Simpson.

3 Etude de la famille d'opérateurs $H(\zeta) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (t - \zeta)^2$.

Pour $\zeta \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur $H(\zeta)$ pour toute fonction u indéfiniment dérivable sur $[a, b]$ par :

$$H(\zeta)u(t) = -u''(t) + (t - \zeta)^2 u(t), \ \forall t \in]a, b[.$$

Notons $C_0^\infty([a, b])$ l'ensemble des restrictions à $[a, b]$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $C_0^\infty(]a, b[)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $]a, b[$. On définit les réels suivants :

$$\lambda(\zeta, a, b) = \inf_{u \in C_0^\infty(]a,b[), u \neq 0} \frac{< H(\zeta)u, u >_{L^2(]a,b[)}}{||u||^2} \text{ et } \mu(\zeta, a, b) = \inf_{u \in C_0^\infty([a,b]), u \neq 0} \frac{< H(\zeta)u, u >_{L^2(]a,b[)}}{||u||^2}, \tag{3.1}$$

en désignant par $< ., . >_{L^2(]a,b[)}$ le produit scalaire L^2 sur $]a, b[$ et $||u||$ la norme associée.

1. (a) Montrer que $\lambda(\zeta, a, b) \geq \mu(\zeta, a, b)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ et tout $a \in [-\infty, +\infty[$, $b \in]-\infty, +\infty]$.

   (b) Supposons que $]a, b[\subset]a', b'[$. Pour tout $u \in C_0^\infty(]a, b[)$, on définit $\tilde{u}$ sur $]a', b'[$ en prolongeant u par zéro sur $]a', a] \cup [b, b'[$. Montrer que $\tilde{u} \in C_0^\infty(]a', b'[)$. En déduire que $\lambda(\zeta, a, b) \geq \lambda(\zeta, a', b')$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$.

   (c) Notons $\mathcal{S}([a, b])$ la restriction à $[a, b]$ des fonctions de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}), t^j u^{(k)} \in L^2(\mathbb{R}),$ pour tout $j, k \geq 0\}$. Supposons $-\infty < a < b < +\infty$. On admet qu'il existe deux applications Φ_D et Φ_N continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ muni de la norme $||f|| + ||f'||$:

$$\begin{aligned} \Phi_D: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a, b]), ||u||_{L^2([a,b])} = 1, u(a) = u(b) = 0\}, \\ \Phi_N: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a, b]), ||u||_{L^2([a,b])} = 1, u'(a) = u'(b) = 0\}, \end{aligned}$$

   telles que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$:

$$H(\zeta)(\Phi_D(\zeta)) = \lambda(\zeta, a, b)\Phi_D(\zeta) \text{ et } H(\zeta)(\Phi_N(\zeta)) = \mu(\zeta, a, b)\Phi_N(\zeta).$$

   En estimant les quantités $(\lambda(\zeta + h, a, b) - \lambda(\zeta, a, b)) < \Phi_D(\zeta), \Phi_D(\zeta + h) >_{L^2(]a,b[)}$ et $(\mu(\zeta + h, a, b) - \mu(\zeta, a, b)) < \Phi_N(\zeta), \Phi_N(\zeta + h) >_{L^2(]a,b[)}$, montrer que $\zeta \mapsto \lambda(\zeta, a, b)$ et $\zeta \mapsto \mu(\zeta, a, b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$,

$$\lambda'(\zeta, a, b) = 2\int_a^b (\zeta - t)|\Phi_D(\zeta)(t)|^2 dt \text{ et } \mu'(\zeta, a, b) = 2\int_a^b (\zeta - t)|\Phi_N(\zeta)(t)|^2 dt.$$

   On admet que ces expressions restent valables si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

   (d) Soient a et b tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty[$ et soit $\zeta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda(\zeta, a, b) = \lambda(0, a - \zeta, b - \zeta) \text{ et } \mu(\zeta, a, b) = \mu(0, a - \zeta, b - \zeta).$$

   (e) Supposons $-\infty < a < b < +\infty$. On admet qu'il existe deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ muni de la norme $||f|| + ||f'||$ telles que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Psi_D: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a - \zeta, b - \zeta]), ||u||_{L^2([a-\zeta,b-\zeta])} = 1, u(a - \zeta) = u(b - \zeta) = 0\} \\ \text{et} &\quad H(0)(\Psi_D(\zeta)) = \lambda(\zeta, a, b)\Psi_D(\zeta), \\ \Psi_N: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a - \zeta, b - \zeta]), ||u||_{L^2([a-\zeta,b-\zeta])} = 1, u'(a - \zeta) = u'(b - \zeta) = 0\} \\ \text{et} &\quad H(0)(\Psi_N(\zeta)) = \mu(\zeta, a, b)\Psi_N(\zeta). \end{aligned}$$

   Soient $\zeta \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$.

   i. Montrer que :

$$\begin{aligned} &(\lambda(\zeta + h, a, b) - \lambda(\zeta, a, b)) \int_{a-\zeta}^{b-\zeta-h} \Psi_D(\zeta + h)(t)\overline{\Psi_D(\zeta)(t)} dt \\ = &\; -\Psi_D(\zeta + h)'(b - \zeta - h)\overline{\Psi_D(\zeta)(b - \zeta - h)} - \Psi_D(\zeta + h)(a - \zeta)\overline{\Psi_D(\zeta)'(a - \zeta)}. \end{aligned}$$

   ii. En déduire que $\zeta \mapsto \lambda(\zeta, a, b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée par rapport à ζ vaut $\lambda'(\zeta, a, b) = |\Psi_D(\zeta)'(b - \zeta)|^2 - |\Psi_D(\zeta)'(a - \zeta)|^2$.

   iii. Montrer que :

$$\begin{aligned} &(\mu(\zeta + h, a, b) - \mu(\zeta, a, b)) \int_{a-\zeta}^{b-\zeta-h} \Psi_N(\zeta + h)(t)\overline{\Psi_N(\zeta)(t)} dt \\ = &\; \Psi_N(\zeta + h)'(a - \zeta)\overline{\Psi_N(\zeta)(a - \zeta)} + \Psi_N(\zeta + h)(b - \zeta - h)\overline{\Psi_N(\zeta)'(b - \zeta - h)}. \end{aligned}$$

iv. En déduire que $\zeta \mapsto \mu(\zeta, a, b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée par rapport à ζ vaut

$$\begin{aligned}\mu'(\zeta, a, b) &= \left((a-\zeta)^2 - \mu(\zeta, a, b)\right) |\Psi_N(\zeta)(a-\zeta)|^2 \\ &\quad - \left((b-\zeta)^2 - \mu(\zeta, a, b)\right) |\Psi_N(\zeta)(b-\zeta)|^2 .\end{aligned}$$

(f) On admet que les résultats de la question (3.1e) restent valables si $b = +\infty$ ($a > -\infty$) en supprimant les conditions aux limites au point b. Ecrire, sans justification, les expressions de $\lambda'(\zeta, a, +\infty)$ et de $\mu'(\zeta, a, +\infty)$.

2. Cas où $]a, b[= \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\lambda(\zeta, -\infty, +\infty) = \mu(\zeta, -\infty, +\infty)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer qu'il existe des polynômes P_n de degré n tels que $P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ soit vecteur propre associé à la valeur propre $2n+1$ pour l'opérateur $H(0)$, c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ H(0)\left(P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = (2n+1)P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

En déduire une majoration de $\lambda(\zeta, -\infty, +\infty)$.

(c) Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $(tu(t))' - tu'(t)$.
En prenant le produit scalaire avec u, montrer que :

$$||u||^2 \leq 2||tu||\ ||u'||.$$

En déduire que $\lambda(\zeta, -\infty, +\infty) = 1$.

3. Cas où $]a, b[=]0, +\infty[$.

(a) En utilisant l'expression de $\lambda'(\zeta, 0, +\infty)$ obtenue en (3.1f) et en justifiant le fait que $|\Psi_D(\zeta)'(-\zeta)| \neq 0$, montrer que la fonction $\zeta \to \lambda(\zeta, 0, +\infty)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis que $\lambda(\zeta, 0, +\infty) \geq 1$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{\zeta \to -\infty} \lambda(\zeta, 0, +\infty) = \lim\limits_{\zeta \to -\infty} \mu(\zeta, 0, +\infty) = +\infty$.

(c) En utilisant l'expression de $\mu'(\zeta, 0, +\infty)$ obtenue en (3.1c), montrer que la fonction $\zeta \to \mu(\zeta, 0, +\infty)$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

(d) En utilisant la fonction $u(t) = \exp(-t^2/2)$, montrer que $\mu(0, 0, +\infty) \leq 1$.

(e) Soient $u(t) = \exp(-t^2/2)$ et χ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, minorée par 0 et majorée par 1 telle que $\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$ On définit, pour tout $\zeta > 0$, la fonction χ_ζ sur $\mathbb{R}$ par $\chi_\zeta(t) = \chi(\zeta(t+\zeta))$. En estimant $H(0)(\chi_\zeta u)$, montrer qu'il existe une constante C, indépendante de ζ telle que $\lambda(\zeta, 0, +\infty) \leq 1 + C\zeta^2 \exp(-\zeta^2)$.
En déduire que $\lim\limits_{\zeta \to +\infty} \lambda(\zeta, 0, +\infty) = 1$.
On admet que $\lim\limits_{\zeta \to +\infty} \mu(\zeta, 0, +\infty) = 1$.

(f) On admet que les fonctions $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$ et $\zeta \mapsto \Psi_N(\zeta)$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit ζ_0 un minimum local de $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$, montrer que $\zeta_0^2 = \mu(\zeta_0, 0, +\infty)$ et que $\mu''(\zeta_0) = 2\zeta_0 |\Psi_N(\zeta_0)(-\zeta_0)|^2$.
En déduire que la fonction $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$ admet un unique minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en un point $\zeta_0 > 0$ et que $\mu(\zeta_0) < 1$.

(g) Sur un même graphe, tracer les courbes $\zeta \mapsto \lambda(\zeta, 0, +\infty)$ et $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$.

4. Cas où $a = 0$ et $b \in]0, +\infty[$. On cherche à calculer la plus petite valeur propre de l'opérateur $H(\zeta)$ avec conditions de Neumann en utilisant une méthode d'approximations par différences finies. Soit $u \in C_0^\infty([a, b])$.
Pour une fonction g définie sur un voisinage $]0, \eta[$ de 0, la notation $g(h) = \mathcal{O}(h^n)$ $(n \geq 0)$ signifie qu'il existe un réel $\varepsilon \in]0, \eta]$ et une constante $M \geq 0$ tels que pour tout $0 < h < \varepsilon$, $|g(h)| \leq Mh^n$.

   (a) Soient $t \in]a, b[$ et $h > 0$ tel que $t+h \in]a, b[$ et $t-h \in]a, b[$. Ecrire la formule de Taylor de la fonction u à l'ordre 2 entre les points $t+h$ et t puis entre les points $t-h$ et t. En déduire que
$$u''(t) = \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \tag{3.2}$$

   (b) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 1 entre les points $a+h$ et a puis entre les points $b-h$ et b, montrer que :
$$u'(a) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \mathcal{O}(h) \text{ et } u'(b) = \frac{u(b) - u(b-h)}{h} + \mathcal{O}(h). \tag{3.3}$$

   (c) Soit N un entier strictement positif et $h = \frac{b-a}{N}$. Pour tout entier $j = 0, \cdots, N$, on note t_j le point $t_j = a + jh$ et $u_j = u(t_j)$.
A l'aide des relations (3.3), donner une relation liant u_0 et u_1 puis u_{N-1} et u_N pour discrétiser les conditions aux limites $u'(a) = u'(b) = 0$.

   (d) Soient $0 < j < N$ et $t \in [a + jh, a + (j+1)h[$. Montrer que
$$-u''(t) + (t - \zeta)^2 u(t) = -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + (jh - \zeta)^2 u_j + \mathcal{O}(h).$$

   (e) A l'aide des questions (4c) et (4d) et en définissant le vecteur U par ses coordonnées $(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N)$, montrer qu'il existe une matrice $A(\zeta) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ telle que :
$$u'(a) = u'(b) = 0 \text{ et } \forall t \in]a, b[,\ -u''(t) + (t - \zeta)^2 u(t) = \mu u(t)$$
$$\text{si et seulement si } A(\zeta)U = \mu U + \mathcal{O}(h).$$

   Donner l'expression des coefficients de la matrice $A(\zeta)$. Montrer que l'on peut déterminer les valeurs propres de $A(\zeta)$ à l'aide de l'algorithme développé à la section 1.

5. Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$ et $h = \frac{b-a}{N}$. On définit les points $t_j = a + jh$ pour $j = 0, \ldots, N$. Soient $f \in C_0^\infty(]a, b[)$ et g sa dérivée.

   (a) Montrer que :
$$< H(\zeta)f, f >_{L^2(]a,b[)} = \int_a^b \left(|g(t)|^2 + (t - \zeta)^2 |f(t)|^2\right) dt.$$

   (b) On note F et G les vecteurs de coordonées respectives $(f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_N))$ et $(g(t_0), g(t_1), \ldots, g(t_N))$. Par la méthode des trapèzes (rappelée en (2.4)), donner des approximations, notées respectivement $T_h(f, g)$ et $T_h(f)$, de $< H(\zeta)f, f >_{L^2(]a,b[)}$ et de $||f||^2$ et une estimation des erreurs.

   (c) En déduire une majoration de $\lambda(\zeta, a, b)$.

   (d) Proposer une méthode pour augmenter la précision du calcul de $< H(\zeta)f, f >_{L^2(]a,b[)}$ et de $||f||^2$.

FIN DE L'ÉPRE