Le but du problème est d'étudier l'opérateur différentiel :

$$P = \frac{1}{2}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2), x \in \mathbb{R}.$$

et l'équation aux dérivées partielles :

$$(S)\begin{cases} (\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + P)u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = v(x) \end{cases}$$

où la donnée initiale $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Les dérivations seront au sens classique ou au sens des distributions suivant le besoin requis par la régularité de u. Si $u(x)$ est deux fois dérivable on a $Pu(x) = \frac{1}{2}[-u''(x) + x^2u(x)]$.

On s'intéressera aux opérateurs $U_t, t \in \mathbb{R}$ définis par $u(t,x) = U_tv(x)$ pour $u(t,x)$ solution de (S). On montrera plus loin que U_t est bien défini comme opérateur dans des espaces adéquats.

La troisième partie peut être traitée indépendamment des deux premières.

Notations et Rappels

- On notera $\Re(\zeta)$ la partie réelle et $\Im(\zeta)$ la partie imaginaire du nombre complexe ζ.

• On notera $L^2(\mathbb{R})$ l'espace des (classes d'équivalence de) fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de carré du module sommable. On notera $(f|g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ le produit hermitien de 2 fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, et $\|f\| = (f|f)^{\frac{1}{2}}$ la norme d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

• L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}, \exists C_{\alpha\beta}; |x^\alpha||f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha\beta}, \forall x \in \mathbb{R}\},$$

où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et $f^{(\beta)}$ la dérivée d'ordre β de f.

• On notera $\varphi'_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)$, $\varphi'_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)$, $\varphi''_{x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)$, ... les dérivées partielles.

• Si P et Q sont des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}$ le composé est noté PQ et on définit par récurrence $P^n = PP^{n-1}$ en convenant que $P^0 = I$.

• On notera $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx$ la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. On rappelle que la tranformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a la formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

• Enfin on rappelle que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne :

$$w(x) = e^{-ax^2}, a > 0; \quad \hat{w}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

D'autre part cette formule peut s'étendre au cas où a est un complexe non nul de partie réelle positive ou nulle, $\Re(a) \geq 0$, $a \neq 0$ en posant $a = |a|e^{i\alpha}$, $\sqrt{a} = |a|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Première Partie

On va diagonaliser l'opérateur $P = \frac{1}{2}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)$.

1) Soit $\tilde{P} = P - \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $\tilde{P} = \frac{1}{2}YX$ où $X = \frac{d}{dx} + x$ et $Y = -\frac{d}{dx} + x$.

Calculer l'opérateur $XY - YX$.

b) Montrer que $XY^n = Y^nX + 2nY^{n-1}, \forall n \geq 1$.

c) Soit $X^mY^ne^{-\frac{x^2}{2}}$ la fonction transformée de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ par l'opérateur X^mY^n. Montrer que $X^mY^ne^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ si $m > n$ et calculer $X^nY^ne^{-\frac{x^2}{2}}$.

2) Soit $H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} Y^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que H_n est un polynôme de degré n et calculer son terme de plus haut degré.

3) On pose $h_n(x) = c_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ où $c_n > 0$.

a) Montrer que $h_n \in L^2(\mathbb{R})$.

b) Calculer les produits scalaires $(h_n|h_m)$.

c) Trouver l'expression de c_n pour que $\|h_n\| = 1$.

4) Montrer que pour chaque n il existe une constante λ_n telle que $Ph_n = \lambda_n h_n$. Calculer λ_n.

5) Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $(g|h_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\int e^{-\frac{x^2}{2}} x^k g(x) dx = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $e^{-\frac{x^2}{2}} g(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

c) Pour $\zeta \in \mathbb{C}$, on pose $G(\zeta) = \int e^{-ix\zeta} e^{-\frac{x^2}{2}} g(x) dx$. Montrer que $G(\zeta)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour cela on montrera que pour tout $R > 0$, $G(\zeta)$ est holomorphe dans la bande $B_R = \{\zeta; |\Im(\zeta)| < R\}$.

d) Calculer les dérivées à tout ordre de $G(\zeta)$ en $\zeta = 0$.

e) Montrer que $G(\zeta)$ est identiquement nulle. En déduire que $g(x)$ est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

f) Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

6) Soit $v(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $h_n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $v(x)$ peut s'écrire $v(x) = \Sigma_{n \geq 0} a_n h_n(x)$ la série convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$.

c) Exprimer $\|v\|$ à l'aide des coefficients a_n.

d) Exprimer $Pv(x)$ et $\tilde{P}^k v(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ sous forme de somme de séries de fonctions.

e) Montrer que la suite (a_n) est à décroissance rapide c'est-à-dire que $(n^k a_n)$ est bornée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Deuxième Partie

Dans cette partie on considère l'équation (S) et les opérateurs U_t.

7) Pour $v(x) = h_n(x)$ montrer que (S) admet une solution de la forme $u(t,x) = u_n(t)h_n(x)$. Expliciter $u_n(t)$.

8) Pour $v(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que (S) admet une unique solution $u(t,x)$ telle que $U_t v(x) = u(t,x)$ soit C^∞ en t à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$.

9) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, U_t se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

10) On note encore U_t l'isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ ainsi définie. Montrer que $U_{s+t} = U_s \circ U_t, \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Troisième Partie

Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ sera dite canonique si sa matrice K dans la base canonique vérifie ${}^tKJK = J$.

Soit $\psi(x,\eta) = a\frac{x^2}{2} + bx\eta + c\frac{\eta^2}{2}$ une forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^2$, les variables étant x et η. On suppose que $b = \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial \eta} \neq 0$.

On considérera l'opérateur A défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$Av(x) = \int e^{i\psi(x,\eta)}\hat{v}(\eta)d\eta = \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{i\psi(x,\eta)-iy\eta}e^{-\epsilon\eta^2}v(y)dyd\eta.$$

11) Montrer que l'ensemble des transformations linéaires canoniques de $\mathbb{R}^2$ est un sous-groupe du groupe linéaire.

12) On considère la transformation K_ψ de $\mathbb{R}^2$ qui envoie $(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,\eta),\eta)$ sur $(x, \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\eta))$.

Montrer que K_ψ est une transformation linéaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

13) A la forme linéaire $l(x,\eta) = \alpha x + \beta\eta$ on associe l'opérateur différentiel $l(x, \frac{1}{i}\frac{d}{dx}) = \alpha x + \beta\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ et à $m(x,\eta) = \gamma x + \delta\eta$ on associe l'opérateur différentiel $m(y, \frac{1}{i}\frac{d}{dy}) = \gamma y + \delta\frac{1}{i}\frac{d}{dy}$.

a) Montrer que si les formes linéaires $l(x,\eta)$ et $m(x,\eta)$ sont reliées par $l \circ K_\psi = m$ alors on a :

$$l(x, \frac{1}{i}\frac{d}{dx}) \circ A = A \circ m(y, \frac{1}{i}\frac{d}{dy}).$$

b) En déduire que $Av \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

14) On considère sur $\mathbb{R}^2_{(x,\xi)}$ les variables étant x et ξ, le champ de vecteur $\xi\frac{d}{dx} - x\frac{d}{d\xi}$ c'est-à-dire l'application qui au point $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$ associe le vecteur de composantes $(\xi, -x)$.

a) Trouver la courbe intégrale de ce champ de vecteur d'origine $x(0) = y, \xi(0) = \eta$. On rappelle que $(x(t), \xi(t))$ doit vérifier $x'(t) = \xi(t), \xi'(t) = -x(t)$ pour tout t dans l'intervalle de définition de la courbe intégrale.

b) Soit R_t la transformation qui à (y,η) associe $(x(t),\xi(t))$. Trouver la matrice de R_t, montrer que R_t est une transformation géométrique simple et vérifier que R_t est une transformation canonique.

c) Montrer que R_t transforme la droite $D_0 = \{(y,\eta), y \in \mathbb{R}\}$ en une droite qui pour $|t| < \frac{\pi}{2}$ peut s'écrire $D_t = \{(x, \frac{\eta}{\cos t} - (\tan t)x), x \in \mathbb{R}\}$.

Quatrième Partie

Dans cette partie on cherche à écrire U_t sous forme d'un opérateur intégral étudié dans la troisième partie.

$$U_t v(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\varphi(t,x,\eta)} a(t)\hat{v}(\eta) d\eta,$$

où les fonctions $\varphi(t,x,\eta)$ et $a(t)$ sont suffisamment dérivables dans un voisinage de $t = 0$.

15) Justifier les dérivations et montrer que les fonctions $\varphi(t,x,\eta)$ et $a(t)$ conviennent si elles vérifient :

$$(E)\begin{cases} \varphi'_t + \frac{1}{2}((\varphi'_x)^2 + x^2) = 0 \\ \varphi(0,x,\eta) = x\eta \end{cases}$$

$$(T)\begin{cases} a' + \frac{1}{2}\varphi''_{x^2} a = 0 \\ a(0) = 1 \end{cases}$$

16) Montrer que (E) admet pour $|t| < \frac{\pi}{2}$ une solution de la forme :

$$\varphi(t,x,\eta) = C(t,\eta) + \frac{x\eta}{\cos t} - (\tan t)\frac{x^2}{2}$$

et calculer $C(t,\eta)$.

17) Résoudre alors l'équation (T) et montrer que pour $|t| < \frac{\pi}{2}$ on a :

$$U_t v(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(-(\tan t)\frac{x^2}{2} + \frac{x\eta}{\cos t} - (\tan t)\frac{\eta^2}{2})} (\cos t)^{-\frac{1}{2}} \hat{v}(\eta) d\eta.$$

18) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'opérateur U_t envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cinquième Partie

On va écrire U_t sous forme d'un autre opérateur intégral pour $0 < t < \pi$.

19) Calculer pour $0 < t < \frac{\pi}{2}$ l'intégrale :

$$I(x,y,t) = \int e^{i(\frac{x\eta}{\cos t} - (\tan t)\frac{\eta^2}{2} - y\eta)} d\eta$$

On pourra utiliser les rappels du début de l'énoncé.

20) Montrer que pour $0 < t < \pi$ on a :

$$U_t v(x) = e^{-i\frac{\pi}{4}} (\sin t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i(\frac{\cos t}{\sin t}\frac{x^2}{2} - \frac{xy}{\sin t} + \frac{\cos t}{\sin t}\frac{y^2}{2})} v(y) dy.$$

On le montrera d'abord pour $0 < t < \frac{\pi}{2}$ en utilisant le fait que :

$$U_t v(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\varphi(t,x,\eta)} a(t) e^{-\epsilon\eta^2} e^{-iy\eta} v(y) d\eta dy$$

puis pour étendre la formule à $0 < t < \pi$ on utilisera l'équation (S).

21) Calculer $U_{\frac{\pi}{2}}$, U_π et $U_{2\pi}$ et vérifier que ce sont des opérateurs simples.

22) Soit $\tilde{u}(t,x) = \tilde{U}_t v(x)$ la solution de l'équation

$$(\tilde{S}) \begin{cases} (\frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \tilde{P})\tilde{u}(t,x) = 0 \\ \tilde{u}(0,x) = v(x) \end{cases}$$

où $\tilde{P} = P - \frac{1}{2}$. Montrer que $\tilde{U}_t$ s'exprime simplement en fonction de U_t.

23) Montrer que $\tilde{U}_{2\pi}$ est l'opérateur identité. Retrouver le fait que les valeurs propres de $\tilde{P}$ sont des entiers.

24) Calculer la transformée de Fourier de $h_n(x), n \in \mathbb{N}$, où h_n est définie à la question 3 de la première partie.

25) Trouver une formule intégrale pour U_t respectivement pour $k\pi - \frac{\pi}{2} < t < k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ et pour $k\pi < t < \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

FIN