B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Aucun document personnel n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Notations

De manière usuelle, on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. La droite réelle est notée $\mathbb{R}$.

Dans tout le problème, f désigne une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et on note L une constante de Lipschitz de f :

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|\,, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}\,.$$

On supposera $L > 0$.

On définit la fonction $g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule

$$g(u,v) = \frac{1}{2}(f(u) + 2Lu) + \frac{1}{2}(f(v) - 2Lv)\,.$$

Partie I

Soit $u_* \in \mathbb{R}$ un zéro de f :

$$f(u_*) = 0\,.$$

Cette partie du problème est consacrée à l'étude de l'existence d'une suite $(w_i)_{i\geq 0}$ solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(w_i, w_{i+1}) & = & 0\,, \quad \forall i \in \mathbb{N}\,, \\ w_0 & = & 0\,, \\ w_i & \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} & u_*\,. \end{array}\right. \tag{1}$$

1) On note f_- et f_+ les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définies par les formules

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_-(u) & = & \dfrac{1}{2}(f(u) - 2Lu)\,, \\[2ex] f_+(u) & = & \dfrac{1}{2}(f(u) + 2Lu)\,. \end{array}\right.$$

a) Soit $u, u' \in \mathbb{R}$ avec $u' \geq u$. Montrer que

$$f_-(u') - f_-(u) \leq -\frac{L}{2}(u' - u) \qquad \text{et} \qquad f_+(u') - f_+(u) \geq \frac{L}{2}(u' - u)\,.$$

b) En déduire que f_- (respectivement, f_+) est strictement décroissante (respectivement, strictement croissante) sur $\mathbb{R}$ et que ces fonctions induisent des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2) On considère le système suivant, d'inconnue $(w_i)_{i\geq 0}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(w_i, w_{i+1}) & = & 0\,, \quad \forall i \in \mathbb{N}\,, \\ w_0 & = & 0\,. \end{array}\right. \tag{2}$$

a) Montrer que la fonction g est strictement croissante par rapport à sa première variable et strictement décroissante par rapport à sa deuxième variable (on pourra exprimer g en fonction de f_- et f_+).

b) Montrer que le système (2) admet une unique solution (w_i).

3) Montrer que $f_-(w_{i+1}) - f_-(w_i) = f_+(w_{i-1}) - f_+(w_i)$ pour tout $i \geq 1$. En déduire que la suite (w_i) est monotone puis montrer que (w_i) est décroissante dans le cas où $f(0) \leq 0$, croissante dans le cas où $f(0) \geq 0$.

Soit $M > 0$. On suppose que $u_* \in [0, M]$.

4) On suppose f strictement croissante sur $[0, M]$. Montrer que si (1) admet une solution, alors $u_* = 0$.

5) On suppose $f' < 0$ sur $[0, M]$.

a) Montrer que (w_i) est bornée par les nombres 0 et u_*.

b) Montrer que $w_\infty = \lim\limits_{i \to +\infty} w_i$ existe puis montrer que (1) a une solution, c'est-à-dire que $w_\infty = u_*$.

c) On suppose que u_* est non nul (donc $u_* \in]0, M]$). Soit $\alpha = \min\limits_{0 \leq s \leq u_*} (-f'(s))$. Justifier $\alpha > 0$ et montrer

$$u_* - w_{i+1} \leq \gamma(u_* - w_i)\,, \qquad \gamma = \frac{L}{L + \alpha/2}\,.$$

d) En déduire

$$|u_* - w_i| \leq u_* \gamma^i\,, \quad \forall i \geq 0\,.$$

Partie II

On rappelle que g désigne la fonction définie par la formule :

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + 2Lu) + \frac{1}{2}(f(v) - 2Lv)\,,$$

la constante L étant une constante de Lipschitz strictement positive de f sur $\mathbb{R}$. Soit k, h deux réels strictement positifs tels que le rapport $\lambda = \dfrac{k}{h}$ vérifie

$$\lambda = \frac{k}{h} \leq \frac{1}{2L}\,. \tag{3}$$

Étant donné une suite $(u_i^0)_{i \geq 1}$ (dite *condition initiale discrète*), on définit de manière itérative la suite (u_i^n) par la formule : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \geq 1$,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{h} = 0 \tag{4}$$

où on a posé

$$u_0^n = 0\,. \tag{5}$$

1) On rappelle (cela a été prouvé à la question I-2-a) que la fonction g est croissante par rapport à sa première variable, décroissante par rapport à la seconde. Montrer que, d'autre part, la fonction g est $\dfrac{3L}{2}$-Lipschitzienne par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire montrer que :
pour tout $u, v, u', v' \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(u, v) - g(u, v')| \leq \frac{3L}{2}|v - v'| \quad \text{et } |g(u, v) - g(u', v)| \leq \frac{3L}{2}|u - u'|\,.$$

2) a) On suppose que $u_i^0 = 1$ pour tout $i \geq 1$. Calculer $(u_i^1)_{i\geq 1}$ et $(u_i^2)_{i\geq 1}$ dans le cas $f = 0$, $\lambda L = 1/2$.

b) On suppose encore que $u_i^0 = 1$ pour tout $i \geq 1$ (sans faire d'hypothèse particulière sur f). Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_i^n = 1$ pour tout $i \geq n+1$.

3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$, on a $u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$ où $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $H(u,u,u) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et

$$H(u, v', w) - H(u, v, w) = (1 - 2\lambda L)(v' - v)\,, \quad \forall (u, v, v', w) \in \mathbb{R}^4.$$

En déduire que, sous l'hypothèse (3), H est une fonction croissante par rapport à *chacune* de ses variables.

b) On suppose $u_i^0 \in [0,1]$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $u_i^n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$.

4) Soit $(\widetilde{u}_i^n)$ une suite vérifiant (4)-(5), associée à une condition initiale discrète $(\widetilde{u}_i^0)_i$.

a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a \top b = \max\{a, b\}$. Montrer que

$$u_i^{n+1} \top \widetilde{u}_i^{n+1} \leq H(u_{i-1}^n \top \widetilde{u}_{i-1}^n, u_i^n \top \widetilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \top \widetilde{u}_{i+1}^n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$.

b) De même, montrer que

$$u_i^{n+1} \perp \widetilde{u}_i^{n+1} \geq H(u_{i-1}^n \perp \widetilde{u}_{i-1}^n, u_i^n \perp \widetilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \perp \widetilde{u}_{i+1}^n)$$

où $a \perp b = \min\{a, b\}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

c) En utilisant la formule $|a - b| = a \top b - a \perp b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, en déduire

$$|u_i^{n+1} - \widetilde{u}_i^{n+1}| \leq |u_i^n - \widetilde{u}_i^n| + (A_{i-1}^n - A_i^n)\,,$$

où $A_i^n = \lambda(g(u_i^n \top \widetilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \top \widetilde{u}_{i+1}^n) - g(u_i^n \perp \widetilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \perp \widetilde{u}_{i+1}^n))$, puis

$$\forall I \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{I} |u_i^{n+1} - \widetilde{u}_i^{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{I} |u_i^n - \widetilde{u}_i^n| + A_0^n - A_I^n$$

d) Montrer que $A_0^n \leq 0$.

e) Montrer que $A_I^n \geq -|u_{I+1}^n - \widetilde{u}_{I+1}^n|$.

f) En déduire : pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $I \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{I} |u_i^N - \widetilde{u}_i^N| \leq \sum_{i=1}^{I} |u_i^0 - \widetilde{u}_i^0| + \sum_{n=0}^{N-1} |u_{I+1}^n - \widetilde{u}_{I+1}^n|\,.$$

5) *On suppose dorénavant* $f' < 0$ *sur* $[0,1]$

Soit (u_i^n) la suite définie par (4)-(5), associée à la condition initiale discrète (u_i^0) donnée par

$$u_i^0 = 1\,, \quad \forall i \geq 1\,.$$

a) En utilisant les résultats de la partie I, montrer qu'il existe une unique solution $(w_i)_{i\geq 0}$ au système

$$\begin{cases} g(w_i, w_{i+1}) & = & f(1)\,, \quad \forall i \in \mathbb{N}\,, \\ w_0 & = & 0\,, \\ w_i & \xrightarrow[i \to +\infty]{} & 1\,, \end{cases}$$

et qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que

$$|1 - w_i| \leq \gamma^i\,, \quad \forall i \geq 0\,.$$

b) Montrer que la suite $(\widetilde{u}_i^n)$ définie par $\widetilde{u}_i^n = w_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$ vérifie (4)-(5).

c) En utilisant les résultats des questions II-2-b et II-4-f montrer que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |1 - u_i^N| \leq 2 \sum_{i=1}^{N} |1 - w_i| + N|1 - w_{N+1}|\,.$$

d) En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} |1 - u_i^N|$ est bornée indépendamment de $N \in \mathbb{N}^*$.

Partie III

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) \neq 0$, on note $\operatorname{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $N \times N$ à coefficients réels, on note I_N la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

On note $\langle X, Y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ (*i.e.*

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j\,, \qquad \forall X = {}^t(x_1, \cdots, x_N), Y = {}^t(y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N)$$

et on désigne par $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée ($\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle}$).

1) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ orthogonale (*i.e.* ${}^tPP = I_N$) et d'une matrice diagonale D *réelle* ($D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$) telles que $A = PD{}^tP$.

On va maintenant calculer D et P.

2) On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur $\mathbb{R}^N$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq j\leq N} |x_j|$ pour tout $X = {}^t(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathbb{R}^N$.

3) Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X = {}^t(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que $|\mu| \leq 1$.

Il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\mu = \cos(\theta)$.

b) Montrer que $x_{j+2} - 2\mu x_{j+1} + x_j = 0$ pour $1 \leq j \leq N-2$. En déduire que $x_j = \alpha\cos(j\theta) + \beta\sin(j\theta)$ pour $1 \leq j \leq N$ où α et β sont des constantes réelles.

c) En utilisant les identités $x_2 = 2\mu x_1$ et $x_{N-1} = 2\mu x_N$, en déduire $\alpha = 0$ puis $\theta = \dfrac{k\pi}{N+1}$, $1 \leq k \leq N$.

Pour $k \in \{1, \ldots, N\}$ on pose donc $\theta_k = \dfrac{k\pi}{N+1}$, on note $\mu_k = \cos(\theta_k)$ la k-ième valeur propre de A. On note aussi

$$X_k = \beta_k {}^t(\sin(\theta_k), \sin(2\theta_k), \cdots, \sin(N\theta_k))$$

le vecteur propre de A associé à la valeur propre μ_k, le réel β_k étant choisi positif *et tel que $\|X_k\|_2 = 1$. Soit enfin P la matrice de vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_N$.*

4) Montrer que P est une matrice orthogonale et montrer que P diagonalise A.

5) a) Montrer la formule

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad \sum_{j=1}^{N} \sin(j\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \text{ pair}, \\ \operatorname{cotan}\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right) & \text{si} \quad k \text{ impair}. \end{cases} \tag{7}$$

b) Montrer que $\beta_k = \sqrt{\dfrac{2}{N+1}}$ pour tout $1 \leq k \leq N$.

c) On note $\mathbf{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont toutes les composantes sont égales à 1 : $\mathbf{1} = {}^t(1, \cdots, 1)$. Montrer que les composantes du vecteur ${}^tP\mathbf{1}$ sont données par la formule suivante :

$$({}^tP\mathbf{1})_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \text{ pair}, \\ \sqrt{\dfrac{2}{N+1}} \operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi j}{2(N+1)}\right) & \text{si} \quad j \text{ impair}. \end{cases} \tag{8}$$

Partie IV

Soit $(u_i^0)_{i \geq 1}$ la suite définie par $u_i^0 = 1$ pour tout $i \geq 1$.

Dans la partie II, on a étudié la suite (u_i^n) définie à partir de (u_i^0) par les relations (4)-(5) et on a en particulier montré que, dans le cas où la fonction f vérifie $f' < 0$ sur $[0, 1]$, la quantité $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N)$ est bornée indépendamment de l'entier N.

On s'intéresse ici au cas où la fonction f est *nulle*. On fixe la valeur du produit λL à $1/2$, de sorte que la suite $(u_i^n)_{i \geq 1}$ est définie par la relation de récurrence

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n), \qquad i \geq 1,$$

où on a posé $u_0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle qu'on a $u_i^n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$ et que $u_i^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq n + 1$.

On se propose maintenant de montrer le résultat suivant : il existe deux constantes positives c_0 et c_1, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tels que, pour tout $N \geq N_0$,

$$c_0\sqrt{N} \leq \sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N) \leq c_1\sqrt{N}. \tag{9}$$

On fixe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.

1) On pose $U_n = {}^t(u_1^n, \cdots, u_N^n) \in \mathbb{R}^N$. Montrer que, pour tout $n \leq N$,

$$U_{n+1} = AU_n + V$$

où A est la matrice définie par la formule (6) et $V = {}^t(0, \cdots, 0, 1/2) \in \mathbb{R}^N$.
On rappelle qu'on désigne par $\mathbf{1}$ le vecteur $\mathbf{1} = {}^t(1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^N$ (de sorte que $U_0 = \mathbf{1}$). Montrer que $U_N = A^N\mathbf{1} + \sum_{n=0}^{N-1} A^n V$ puis

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N) = \langle (I_N - A^N)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle - \sum_{n=0}^{N-1}\langle A^n V, \mathbf{1}\rangle \,. \tag{10}$$

2) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N) = \frac{1}{2}\langle (I_N - A^N)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle \,. \tag{11}$$

3) a) En utilisant les résultats de la partie III, montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N) = \sum_{j \in J_N} a_j^N b_j^N \tag{12}$$

avec

$$a_j^N = \frac{1}{N+1}\mathrm{cotan}^2\left(\frac{\pi j}{2(N+1)}\right), \quad b_j^N = 1 - \cos^N\left(\frac{\pi j}{N+1}\right),$$

et

$$J_N = \{j \in \{1, \dots, N\}, j \text{ impair }\}.$$

On partitionne J_N en $J_N = K_N \cup L_N$ avec

$$K_N = \{j \in J_N, 1 \leq j \leq \sqrt{N+1}\}, \quad L_N = \{j \in J_N, \sqrt{N+1} < j\},$$

et on pose $Y_N = \sum_{j \in K_N} a_j^N b_j^N$, $Z_N = \sum_{j \in L_N} a_j^N b_j^N$, de sorte que $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N) = Y_N + Z_N$.

b) *Minoration de $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - u_i^N)$:*

i) Montrer que $\mathrm{cotan}(x) \geq \frac{1}{x\sqrt{2}}$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. En déduire

$$a_j^N \geq \frac{2(N+1)}{\pi^2 j^2}, \quad \forall N \geq 3, \; j \in K_N.$$

ii) Prouver les inégalités

$$\begin{cases} \ln(\cos(x)) \leq -\dfrac{x^2}{2}, & \forall x \in [0, \pi/2[, \\ 1 - e^{-u} \geq e^{-\pi^2/2} u, & \forall u \in [0, \pi^2/2]. \end{cases}$$

En déduire

$$b_j^N \geq \frac{\pi^2 e^{-\pi^2/2}}{2} \frac{Nj^2}{(N+1)^2}, \quad \forall N \geq 3, \ j \in K_N.$$

iii) Montrer que

$$a_j^N b_j^N \geq \frac{e^{-\pi^2/2}}{2}, \quad \forall N \geq 3, \ j \in K_N.$$

Montrer que, pour $N \geq 15$, le cardinal de K_N est minoré par $\dfrac{\sqrt{N+1}}{4}$ et en déduire que, pour $N \geq 15$, on a

$$Y_N \geq \frac{e^{-\pi^2/2}}{8} \sqrt{N}.$$

iv) Justifier $Z_N \geq 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et en déduire

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) \geq \frac{e^{-\pi^2/2}}{8} \sqrt{N}, \quad \forall N \geq 15.$$

c) *Majoration de* $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N)$ *:*

i) Prouver les estimations

$$\begin{cases} \ln(\cos(x)) \geq -x^2, & \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ 1 - e^{-u} \leq u, & \forall u \geq 0. \end{cases}$$

En déduire que

$$b_j^N \leq \frac{\pi^2 N j^2}{(N+1)^2}, \quad \forall N \geq 15, \ \forall j \in K_N. \tag{13}$$

ii) Montrer

$$0 \leq \mathrm{cotan}(x) \leq \frac{\pi}{2x}, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

puis $a_j^N b_j^N \leq \dfrac{\pi^2 N}{N+1}$ pour tout $N \geq 15$, $j \in K_N$. En déduire

$$Y_N \leq \pi^2 \sqrt{N}, \quad \forall N \geq 15.$$

iii) Montrer que

$$a_j^N \leq \int_{j-1}^{j} \frac{1}{N+1} \mathrm{cotan}^2 \left(\frac{\pi t}{2(N+1)} \right) dt, \quad \forall j \in \{2, \dots, N\}.$$

En remarquant que $0 \leq b_j^N \leq 2$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, N\}$, en déduire

$$Z_N \leq \frac{2}{N+1} \int_{\sqrt{N+1}-1}^{N} \mathrm{cotan}^2 \left(\frac{\pi t}{2(N+1)} \right) dt.$$

En calculant cette intégrale, montrer

$$Z_N \leq \frac{4}{\pi}\text{cotan}\left(\frac{\pi(\sqrt{N+1}-1)}{2(N+1)}\right) .$$

En déduire l'existence de constantes $c_f > 0$ et $N_f \in \mathbb{N}^*$ (dont on précisera les valeurs) telles que

$$Z_N \leq c_f\sqrt{N}\,, \forall N \geq N_f \,.$$

4) Donner des valeurs de c_0, c_1, N_0 pour lesquelles (9) a lieu.