C34121

3è ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 HEURES

L'usage de toute calculatrice est interdit

Aucun document personnel n'est autorisé

Tournez la page S.V.P.

On définit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$. On rappelle que l'on dit que

$$\int_0^{\infty} F(t)\,dt \text{ converge et vaut } L \in \mathbb{C}$$

lorsque

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X F(t)\,dt = L.$$

On rappelle le critère de Cauchy : cette limite existe si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists X_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall X, Y, X_\varepsilon \leq X \leq Y, \quad \left| \int_X^Y F(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, lorsque

$$\int_0^{\infty} |F(t)|\,dt \text{ converge,}$$

on dit que

$$\int_0^{\infty} F(t)\,dt \ \text{ est absolument convergente.}$$

On rappelle également que si $h : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et si Γ est un chemin contenu dans U, admettant un paramétrage $\gamma : [a, b] \to U$ continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$), alors *l'intégrale curviligne* de la fonction h le long du chemin Γ est définie par

$$\int_\Gamma h(z)\,dz \ := \ \int_a^b h(\gamma(u))\gamma'(u)\,du.$$

Pour tout $F \in \mathcal{C}$, on définit $f = \mathcal{L}F$ par

$$f(s) \ = \ (\mathcal{L}F)(s) \ := \ \int_0^{+\infty} F(t)e^{-st}\,dt,$$

pour les nombres complexes s tels que cette intégrale impropre converge. On dit que $f = \mathcal{L}F$ est la *transformée de Laplace* de F.

Le but de ce problème est l'étude de quelques propriétés et applications de la transformation de Laplace.

On notera $\mathcal{L}$ la transformation de Laplace et on notera en lettre majuscule (par exemple F) les fonctions *originales* (fonctions de la variable réelle t) et en lettre minuscule (par exemple f) les fonctions *images* par $\mathcal{L}$ (fonctions de la variable complexe s).

On utilisera librement les résultats suivants :

Théorème de Stone-Weierstrass. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a \leq b < +\infty$). Alors, pour toute fonction continue f de $[a, b] \to \mathbb{C}$, il existe une suite P_n de polynômes de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que P_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers f lorsque $n \to +\infty$.

Théorème d'holomorphie d'une intégrale à paramètre. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $g : (s, t) \in U \times I \mapsto g(s, t) \in \mathbb{C}$ une fonction de deux variables vérifiant :

(i) $\forall s \in U$, la fonction $t \in I \mapsto g(s,t)$ appartient à $L^1(I)$. On note alors g la fonction définie sur U par :

$$\forall s \in U, \quad \tilde{g}(s) \;=\; \int_I g(s,t)\,dt.$$

(ii) Pour presque tout $t \in I$, la fonction $s \in U \mapsto g(s,t)$ est holomorphe (ou $\mathbb{C}$-dérivable). On note $s \in U \mapsto \frac{\partial}{\partial s} g(s,t)$ sa dérivée au sens complexe.

(iii) Il existe $h \in L^1(I)$ telle que pour tout $s \in U$ et pour presque tout $t \in I$, $|\frac{\partial}{\partial s} g(s,t)| \leq h(t)$.

Alors la fonction $\tilde{g}$ est définie et holomorphe sur U et sa dérivée au sens complexe est donnée par :

$$\forall s \in U, \quad \tilde{g}'(s) \;=\; \int_I \frac{\partial}{\partial s} g(s,t)\,dt.$$

PARTIE I. DOMAINES DE CONVERGENCE ET RÉGULARITÉ

Domaine de convergence absolue

Pour tout $F \in \mathcal{C}$, on définit le ***domaine de convergence absolue*** de $\mathcal{L}F$ par

$$A(F) \;:=\; \{s \in \mathbb{C} \mid \int_0^{+\infty} F(t)e^{-st}\,dt \text{ converge absolument }\},$$

et ***l'abscisse de convergence absolue*** de $\mathcal{L}F$ par

$$\alpha(F) \;:=\; \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma \in A(F)\}.$$

1. Soit $F \in \mathcal{C}$. On suppose que $A(F)$ est non vide. Soit $s_0 \in A(F)$. Montrer que

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) \geq \mathcal{R}e(s_0)\} \;\subset\; A(F).$$

2. En déduire que, pour tout $F \in \mathcal{C}$, on est dans l'un des cas suivants:
(i) $A(F) = \mathbb{C}$;
(ii) $A(F) = \emptyset$;
(iii) $A(F)$ est un demi-plan ouvert à préciser;
(iv) $A(F)$ est un demi-plan fermé à préciser.

3. Donner un exemple de fonction correspondant à chacune des quatre situations précédentes.

Domaine de convergence simple

Pour tout $F \in \mathcal{C}$, on définit le ***domaine de convergence*** de $\mathcal{L}F$ par

$$C(F) \;:=\; \{s \in \mathbb{C} \mid \int_0^{+\infty} F(t)e^{-st}\,dt \text{ converge }\},$$

et ***l'abscisse de convergence*** de $\mathcal{L}F$ par

$$\gamma(F) \;:=\; \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma \in C(F)\}.$$

Tournez la page S.V.P.

4. Soit $F \in \mathcal{C}$. On suppose que $C(F)$ est non vide. Soit $s_0 \in C(F)$. On introduit

$$\forall t \geq 0, \quad G(t) \; = \; -\int_t^{+\infty} F(\tau)e^{-s_0\tau}\,d\tau.$$

a. Montrer que $G(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, et calculer $G'(t)$.

b. Soit $X > 0$ et $s \in \mathbb{C}$ fixés. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^X F(t)e^{-st}\,dt = G(X)e^{(s_0-s)X} - G(0) - (s_0 - s)\int_0^X G(t)e^{(s_0-s)t}\,dt.$$

c. En déduire que

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(s_0)\} \subset C(F),$$

et que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(s_0)$, on a

$$(1) \qquad f(s) = f(s_0) + (s - s_0)\int_0^{+\infty} G(t)e^{-(s-s_0)t}\,dt,$$

où f désigne $\mathcal{L}F$.

5. Montrer que, pour tout $F \in \mathcal{C}$, on est dans l'un des cas suivants:
(i) $C(F) = \mathbb{C}$;
(ii) $C(F) = \emptyset$;
(iii) $P_F \subset C(F) \subset \overline{P_F}$ où P_F est le demi-plan complexe ouvert

$$P_F := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > \gamma(F)\}.$$

6. Montrer que l'on a toujours $\gamma(F) \leq \alpha(F)$.

7. On considère la fonction

$$F_1(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{si} \quad t > 0, \quad F_1(0) = 1.$$

a. Soit $X \geq 1$. Montrer que

$$\int_1^X \frac{e^{i\omega t}}{t}dt = \frac{e^{i\omega X}}{i\omega X} - \frac{e^{i\omega}}{i\omega} + \frac{1}{i\omega}\int_1^X \frac{e^{i\omega t}}{t^2}\,dt.$$

b. En déduire que $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) = 0\} \subset C(F_1)$.

c. Soit $X \geq 1$. Montrer que

$$\int_1^X \frac{|\sin\tau|}{\tau}\,d\tau \geq \int_1^X \frac{1-\cos 2\tau}{2\tau}\,d\tau.$$

d. Déterminer $A(F_1)$, et comparer $A(F_1)$ avec $C(F_1)$.

8. On considère la fonction continue $F_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ affine par morceaux telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$F_2(\ln n) = 0, \quad \text{et} \quad F_2\Big(\frac{\ln n + \ln(n+1)}{2}\Big) = \frac{2(-1)^n}{\ln(n+1)\,(\ln(n+1) - \ln n)}.$$

Donner une allure du graphe de F_2. Montrer que $0 \in C(F_2)$, et que $1 \notin A(F_2)$. Qu'en déduit-on sur $\gamma(F_2)$ et $\alpha(F_2)$?

Partie II. Propriétés fondamentales

Régularité et dérivée de la transformée de Laplace

1. Soit $F \in \mathcal{C}$. On suppose que $C(F)$ est non vide. Soit $s_0 \in C(F)$.

a. Soit $\eta > 0$. On note $P_{F,s_0,\eta}$ le demi-plan complexe suivant:

$$P_{F,s_0,\eta} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(s_0) + \eta\}.$$

À l'aide de (1), montrer que f est holomorphe sur $P_{F,s_0,\eta}$.

b. En déduire que f est holomorphe sur le demi-plan P_F (défini en I.5.) et montrer que

$$\forall s \in P_F, \quad f'(s) = -\int_0^{+\infty} tF(t)e^{-st}\, dt.$$

2. Soit $F \in \mathcal{C}$. On suppose que $C(F) \setminus P_F$ est non vide. Soit $s_0 \in C(F) \setminus P_F$. Pour tout $\beta \in [0, \pi/2[$, on note

$$S_\beta(s_0) := \{s \in \mathbb{C} \mid s = s_0 \text{ ou } |\arg(s - s_0)| \leq \beta\},$$

où, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, arg (z) désigne l'unique argument de z situé dans $[-\pi, \pi[$.

a. Dessiner $S_\beta(s_0)$ et montrer l'inégalité

$$\forall s \in S_\beta(s_0), \quad \mathcal{R}e(s - s_0) \geq |s - s_0| \cos(\beta).$$

b. Soit (s_n) une suite de points de $S_\beta(s_0)$ qui converge vers s_0 quand $n \to \infty$. Déduire de (1) que $f(s_n) \to f(s_0)$ quand $n \to \infty$.

Comportement à l'infini

3. Soit $F \in \mathcal{C}$. On suppose que $C(F)$ est non vide. Soit $s_0 \in C(F)$.

a. À l'aide de (1), montrer que

$$(2) \qquad f(s) = (s - s_0) \int_0^{+\infty} (G(t) - G(0))e^{-(s-s_0)t}\, dt.$$

b. Soit $\beta \in [0, \pi/2[$, et soit (s_n) une suite de points de $S_\beta(s_0)$ telle que $\mathcal{R}e(s_n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$. Montrer que

$$f(s_n) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

(Pour $\eta > 0$ à choisir, on utilisera un découpage de l'intégrale apparaisant dans (2) en une intégrale sur le segment $[0, \eta]$ et une intégrale sur le segment $[\eta, +\infty[$.)

Transformée de Laplace de la dérivée

4. Soit $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ (c'est-à-dire $F' \in \mathcal{C}$). On suppose qu'il existe un réel $\sigma_0 \geq 0$ tel que $\sigma_0 \in C(F')$.

a. On introduit

$$\forall t \geq 0, \quad H(t) := \int_0^t F'(\tau)e^{-\sigma_0 \tau}\, d\tau.$$

Montrer (à l'aide d'une intégration par parties faisant apparaître la fonction H) que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) > \sigma_0, \quad e^{-sX} \int_0^X F'(t)\,dt \to 0 \text{ si } X \to +\infty.$$

b. En déduire que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) > \sigma_0, \quad e^{-sX} F(X) \to 0 \text{ si } X \to +\infty.$$

c. Montrer finalement que, si $\sigma_0 \geq 0$ est tel que $\sigma_0 \in C(F')$, alors $\gamma(F) \leq \sigma_0$ et

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) > \sigma_0, \quad \mathcal{L}(F')(s) = s\mathcal{L}(F)(s) - F(0).$$

Propriété d'unicité

5. a. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction notée ψ. Montrer que

$$\int_0^1 \varphi(x)P_n(x)\,dx \to \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

b. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \varphi(x)x^n\,dx = 0.$$

Démontrer que φ est nulle sur $[0,1]$.

6. a. Soit $F \in \mathcal{C}$. On suppose que $C(F)$ est non vide et qu'il existe $s_0 \in C(F)$ tel que $f(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(s_0)$. A l'aide d'un changement de variables et de (2), montrer que $G(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, puis que $F(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

b. Soient F_1 et F_2 deux fonctions de $\mathcal{C}$ et soient f_1 et f_2 leurs transformées de Laplace respectives. On suppose que $C(F_1)$ et $C(F_2)$ sont non vides, et qu'il existe un réel $s_0 \in C(F_1) \cap C(F_2)$ tel que $f_1(s) = f_2(s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(s_0)$. Montrer que $F_1(t) = F_2(t)$ pour tout $t \geq 0$.

c. Le résultat précédent est-il encore vrai si on suppose seulement qu'il existe $s_0 \in C(F_1) \cap C(F_2)$ tel que $f_1(s) = f_2(s)$ pour tout s de la forme $s = s_0 + n\lambda$ où n décrit $\{1, 2, 3, ...\}$ et où λ est un réel strictement positif fixé ?

Partie III. Exemples et première application

Calculs élémentaires

1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction définie par $F_3(t) = 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2. a. Soit $F \in \mathcal{C}$ telle que $C(F)$ est non vide et soit $f = \mathcal{L}F$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on considère la fonction $G_\alpha : t \in [0, +\infty[\mapsto e^{\alpha t}F(t)$ et on note $g_\alpha = \mathcal{L}G_\alpha$. Déterminer g_α en fonction de f pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $s - \alpha \in C(F)$.

b. En déduire les images par $\mathcal{L}$ des fonctions suivantes (pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$):

(i) $t \in [0, +\infty[\mapsto e^{\alpha t}$; (ii) $t \in [0, +\infty[\mapsto \sin(\omega t)$; (iii) $t \in [0, +\infty[\mapsto \cos(\omega t)$.

Étude relative à la fonction F_1

3. a. Soit F_1 la fonction définie à la question I.7. On note f_1 sa transformée de Laplace. Calculer f_1' puis f_1 sur $\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma > 0\}$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

c. On note Γ le chemin fermé (parcouru dans le sens trigonométrique direct), composé des quatre morceaux suivants :
- Γ_1 est le demi-cercle de centre O et de rayon $R > 0$ dans le demi-plan $\mathcal{I}m(z) > 0$;
- Γ_2 est le segment $[-R, -r]$;
- Γ_3 est le demi-cercle de centre O et de rayon $r > 0$ dans le demi-plan $\mathcal{I}m(z) > 0$;
- Γ_4 est le segment $[r, R]$.

En considérant l'intégrale curviligne de la fonction complexe $g(z) = e^{iz}/z$ le long du chemin Γ, retrouver le résultat précédent

Partie IV. Convolution et applications

On définit $\mathcal{C}_\star$ l'ensemble des fonctions continues $F :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ telle que, si F n'est pas prolongeable par continuité en 0, alors l'intégrale impropre

$$\int_0^1 F(t)\, dt \text{ converge absolument,}$$

c'est-à-dire lorsque

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 |F(t)|\, dt \quad \text{existe.}$$

Pour cette partie, on admettra que les résultats démontrés pour les fonctions de $\mathcal{C}$, dans les parties précédentes, sont encore vrais pour les fonctions de $\mathcal{C}_\star$.

Convolution

1. On considère F et G deux éléments de $\mathcal{C}_\star$ que l'on prolonge par 0 sur $]-\infty, 0[$. On rappelle que la convolée de F et G est la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (F * G)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)G(t - \tau)\, d\tau,$$

lorsque cette intégrale converge. Montrer que $F * G$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (F * G)(t) := \int_0^t F(\tau)G(t-\tau)\,d\tau.$$

2. Soient $F, G \in \mathcal{C}_\star$ et soit $s_0 \in A(F) \cap A(G)$. Montrer que $s_0 \in A(F * G)$ et que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) \geq \mathcal{R}e(s_0), \quad \mathcal{L}(F * G)(s) = \mathcal{L}(F)(s)\mathcal{L}(G)(s).$$

Équation intégrale d'Abel

L'objet de cette partie est la résolution de l'équation intégrale d'Abel :

$$(3) \qquad \int_0^t \frac{G(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = F(t) \quad \text{pour } t \geq 0,$$

où F est une fonction donnée sur $\mathbb{R}_+$ et G une fonction inconnue sur $\mathbb{R}_+$.

3. a. A l'aide d'un changement de variables, montrer que

$$\forall t > 0, \quad \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\,d\tau = \pi.$$

b. On note K la fonction définie par $K(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Vérifier que $K \in \mathcal{C}_\star$ et déterminer $\alpha(K)$.

c. On note k la transformée de Laplace de K. En calculant de deux manières la transformée de Laplace de $K * K$, en déduire

$$k(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{R(s)} \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) > \alpha(K),$$

où R désigne la détermination principale de la racine carrée complexe (i.e. R est définie de $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[\to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $R(z)^2 = z$ et telle que $\forall x \in [0, +\infty[$, $R(x) = \sqrt{x}$.)

4. a. On considère le cas particulier $F(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En transformant l'équation (3) par $\mathcal{L}$, démontrer que (3) admet une unique solution $G \in \mathcal{C}$ donnée par

$$G(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\cos(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

b. Soit $F \in \mathcal{C}$ telle que $F(0) = 0$. On suppose de plus F dérivable sur $]0, +\infty[$, $F' \in \mathcal{C}_\star$ et $A(F')$ non vide. Montrer que (3) possède une unique solution $G \in \mathcal{C}$ que l'on exprimera sous la forme d'une intégrale en fonction de F'. (On utilisera la question II.4.c.).

Partie V. Formule d'inversion

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de la transformée de Laplace inverse. On rappelle que l'on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|\, dt < +\infty.$$

Pour toute fonction $G \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier*, notée $\hat{G}$, par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{G}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\, e^{-iyt}\, dt.$$

Par ailleurs, lorsque $G \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{G} \in L^1(\mathbb{R})$, on rappelle que la *formule de Fourier inverse* est valable :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(y)\, e^{iyt}\, dy \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

Formule d'inversion complexe

Soit $F \in \mathcal{C}$ telle que $\alpha(F) < +\infty$. On prolonge F par 0 sur$]-\infty, 0[$ et on note encore F la fonction ainsi prolongée. Pour tout réel $\sigma > \alpha(F)$, on définit la fonction G_σ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_\sigma(t) := F(t)\, e^{-\sigma t}.$$

1. Montrer que, pour tout $\sigma > \alpha(F)$, $G_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ et que

$$\forall \sigma > \alpha(F),\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{G}_\sigma(y) = f(\sigma + iy),$$

où f désigne la transformée de Laplace de F.

2. On se place sous les hypothèses précédentes et on suppose de plus qu'il existe deux constantes $k > 1$ et $C \geq 0$ telles que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) > \alpha(F), \quad |f(s)| \leq \frac{C}{|s|^k}.$$

a. Montrer que $\hat{G}_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $\sigma > \alpha(F)$.

b. En déduire que, pour tout $\sigma > \alpha(F)$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + iy)\, e^{iyt}\, dy \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

c. Montrer que, pour tout $\sigma > \alpha(F)$, la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + iy)\, e^{iyt}\, dy$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire de plus concernant la relation obtenue dans la question précédente ?

d. On note Δ_σ le chemin représenté par la droite verticale $\Delta_\sigma := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) = \sigma\}$ parcourue de bas en haut. Montrer que, pour tout $\sigma > \alpha(F)$,

$$\forall t > 0, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_\sigma} f(z)\, e^{zt}\, dz.$$

Formule de Heaviside

Dans cette partie, on considère $F \in \mathcal{C}$ telle que $\alpha(F) < +\infty$ et l'on note $f = \mathcal{L}F$. *On fixe* $\sigma > \alpha(F)$ et on suppose que F vérifie les propriétés suivantes:

(i) il existe deux constantes $k > 1$ et $C \geq 0$ telles que

$$\forall s \in \mathbb{C} \ \text{ tel que } \mathcal{R}e(s) > \alpha(F), \quad |f(s)| \leq \frac{C}{|s|^k};$$

(ii) il existe une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{C}$ telle que f soit prolongeable de manière holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, s_3, ...\}$, où $s_1, s_2, s_3, ...$ sont des singularités isolées de f;

(iii) il existe $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\rho_n \to +\infty \quad \text{lorsque } n \to +\infty,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^*, \quad s_k \notin C_{\sigma,n},$$

et

$$\mu_{\sigma,n} := \sup_{s \in C_{\sigma,n}} \{|f(s)|\} \to 0 \ \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

où $C_{\sigma,n}$ désigne le demi-cercle (parcouru dans le sens trigonométrique direct)

$$C_{\sigma,n} := \{s \in \mathbb{C} \mid |s - \sigma| = \rho_n, \ \mathcal{R}e(s) \leq \sigma\}.$$

L'objectif de cette partie est démontrer la *formule de Heaviside*:

$$\forall t > 0, \quad F(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Res}\,(g_t, s_k),$$

où, pour tout $t \geq 0$, la fonction g_t est définie par

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, s_3, ...\}, \quad g_t(s) = f(s)e^{st},$$

et où $\mathrm{Res}\,(g_t, s_k)$ désigne le résidu de la fonction g_t au point s_k.

3. Dans quelle partie de $\mathbb{C}$ sont situées les singularités $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de f ?

4. a. Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\sigma,n}} f(z)\, e^{zt}\, dz\right| \leq \frac{\mu_{\sigma,n}\rho_n}{\pi} e^{\sigma t} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\rho_n \cos(\theta) t}\, d\theta.$$

b. Montrer que

$$\forall \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \quad \cos(\theta) \leq 1 - \frac{2}{\pi}\theta.$$

c. En déduire que, pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\sigma,n}} f(z)\, e^{zt}\, dz \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

5. Soit $\Delta_{\sigma,n}$ le segment vertical (parcouru de bas en haut)

$$\Delta_{\sigma,n} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) = \sigma, \ \mathcal{I}m(s) \in [-\rho_n, \rho_n]\}.$$

On note $\Gamma_{\sigma,n}$ le chemin (parcouru dans le sens trigonométrique direct) constitué de l'union de $\Delta_{\sigma,n}$ et de $\mathcal{C}_{\sigma,n}$.

a. Montrer à l'aide du théorème des résidus que, pour tout $t > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\sigma,n}} f(z)\, e^{zt}\, dz \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Res}\,(g_t, s_k),$$

lorsque cette limite existe.

b. En déduire que, pour tout $t > 0$,

$$F(t) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Res}\,(g_t, s_k).$$