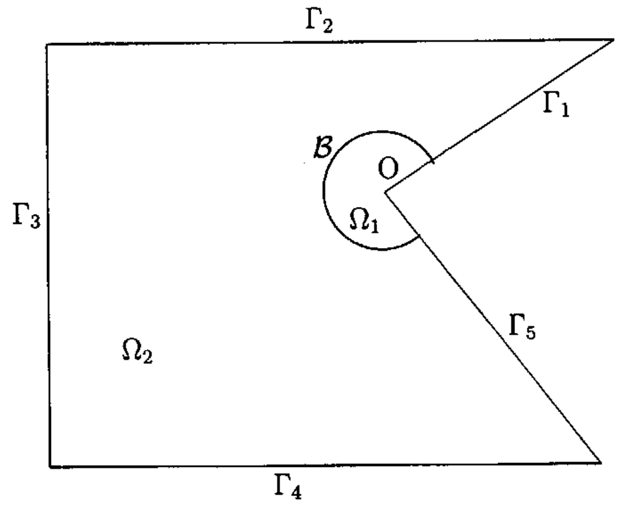
ANALYSE NUMÉRIQUE

On s'intéresse dans ce problème à la résolution numérique du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet par la méthode des éléments finis dans un domaine avec un coin rentrant.

On considère un ouvert polygonal Ω du plan avec un coin rentrant en O *i.e.* d'angle $\omega = \frac{\pi}{\alpha}$ supérieur à π, de sorte que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (voir figure ci-dessous). On considère un arc de cercle $\mathcal{B}$ de rayon R centré en O et on décompose le domaine Ω de frontière polygonale $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$ en deux parties ouvertes Ω_1 et Ω_2 délimitées par $\mathcal{B}$. On notera $\widetilde{\Gamma}_1$ et $\widetilde{\Gamma}_5$ les parties respectivement de Γ_1 et de Γ_5 faisant partie de la frontière de Ω_1. Les notations sont explicitées sur le dessin suivant.

Tournez la page S.V.P.



Etant donnée $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u solution du problème suivant

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \tag{1}$$
$$u = 0 \text{ sur } \Gamma, \tag{2}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien, c'est-à-dire que $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$.

Notations : On introduit les espaces fonctionnels suivants : $C^0(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues en tout point de Ω, $C_c^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω,

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in (L^2(\Omega))^2\},$$

où ∇u est le vecteur de composantes $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, les dérivées étant calculées au sens des distributions. Bien que les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne soient en général pas continues, on peut définir la restriction de $u \in H^1(\Omega)$ sur le bord Γ. On admettra que $\gamma : u \mapsto u_{|\Gamma}$ est une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, appelée trace, qui étend l'opérateur de restriction défini pour les fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. On peut alors définir

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u_{|\Gamma} = 0\}.$$

Et plus généralement, en notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, on définit par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in (L^2(\Omega)), \forall |\alpha| \leq m\},$$

ce qui signifie que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m au sens des distributions sont dans $L^2(\Omega)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, et $u \in H^m(\Omega)$ on note

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (\partial^\alpha u)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme canonique de u dans $H^m(\Omega)$. En particulier $\|u\|_{0,\Omega}$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$ et $\|u\|_{1,\Omega} = (\|u\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla u\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$ désigne la norme dans $H^1(\Omega)$.

On note $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale sortante à Γ définie en presque tout point de Γ. Pour $u \in H^2(\Omega)$, ses dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ sont dans $H^1(\Omega)$, on peut donc définir leur trace sur Γ à l'aide de l'application linéaire γ. On définit alors sur Γ

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

On admettra la formule de Green suivante

$$-\int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Partie I.

1. Pour $f \in L^2(\Omega)$ donnée, on considère le problème suivant :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Montrer que le problème (4) admet une solution unique.

2. Montrer que u solution de (4) est solution du problème (1)-(2).

3. Pour v à support compact dans Ω, on définit $\bar{v}$ le prolongement par 0 de v à $\mathbb{R}^2$. Montrer que $v \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow \bar{v} \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Soit u la solution de (4) et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Soit $w = \varphi u$ et $\bar{w}$ son prolongement par 0 à $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $\bar{w}$ vérifie $-\Delta \bar{w} = g$.

(b) En déduire que $\bar{w} \in H^2(\mathbb{R}^2)$, puis que $w \in H^2(\Omega)$. On pourra utiliser que

$$\bar{w} \in H^2(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow k \mapsto (1 + |k|^2)\hat{w}(k) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

où $\hat{w}$ désigne la transformée de Fourier de $\bar{w}$.

5. (a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Montrer que

$$\|\Delta \varphi\|_{0,\Omega}^2 = \|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\|_{0,\Omega}^2 + \|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\|_{0,\Omega}^2 + 2\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\|_{0,\Omega}^2.$$

(b) En déduire, en admettant que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour la norme de $H^2(\Omega)$, que pour $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|\Delta u\|_{0,\Omega}^2 = \|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\|_{0,\Omega}^2 + \|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\|_{0,\Omega}^2 + 2\|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\|_{0,\Omega}^2.$$

(c) Montrer que pour $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{2,\Omega} \le C\|\Delta u\|_{0,\Omega}.$$

Tournez la page S.V.P.

6. En déduire que $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est injective et que son image est fermée. On note alors N l'orthogonal de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$.

7. Soit $u \in L^2(\Omega)$.

   (a) Montrer que $u \in N \Rightarrow \Delta u = 0$.

   (b) Montrer que pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx - \int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma. \tag{5}$$

   (c) Montrer que si $u \in N \cap H^2(\Omega)$ alors $u_{|\Gamma} = 0$. On admettra que l'image de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ par l'application $u \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ est dense dans $L^2(\Gamma)$.

   (d) Qu'en déduit-on sur $N \cap H^2(\Omega)$?

   (e) Pour $u \in L^2(\Omega)$ telle que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, par extension par rapport au cas de fonctions de $H^2(\Omega)$ on dira que $u_{|\Gamma} = 0$ si

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx - \int_\Omega v \Delta u \, dx = 0 \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

   Montrer qu'avec cette définition on a bien

$$u \in N \Rightarrow u_{|\Gamma} = 0.$$

   (f) On vient de montrer que

$$u \in N \Rightarrow \Delta u = 0 \text{ et } u_{|\Gamma} = 0.$$

   Peut-on en déduire quelque chose sur les éléments de N ?

Partie II. Dans cette partie, on cherche une expression analytique d'un élément de N au voisinage du coin rentrant.

1. Donner l'expression du Laplacien en coordonnées polaires $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ telles que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

2. Chercher sous la forme $u(r,\theta) = v(r)w(\theta)$ les solutions de $\Delta u = 0$ et $u = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_5$.

3. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $u_n = r^{n\alpha} \sin(n\alpha\theta)$. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \in L^2(\Omega)$, $u_n \in H^1(\Omega)$, $u_n \in H^2(\Omega)$?

4. On cherche $S \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta S = 0$ et $S = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_5$ sous la forme

$$S(r,\theta) = \sum_{n \geq -1} A_n r^{n\alpha} \sin(n\alpha\theta), \quad \text{avec } A_{-1} \neq 0. \tag{6}$$

   On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} |A_n| r^{n\alpha}$ est convergente pour tout $r \in [0, R]$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} A_n r^{n\alpha} \sin(n\alpha\theta)$ est convergente pour tout $(r,\theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$.

(b) Montrer qu'on a

$$\text{pour } m \geq 2, \qquad \int_0^{\pi/\alpha} \sum_{n \geq -1} A_n R^{n\alpha} \sin(n\alpha\theta)\sin(m\alpha\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} R^{m\alpha} A_m,$$

$$\text{pour } m = 1, -1, \qquad \int_0^{\pi/\alpha} \sum_{n \geq -1} A_n R^{n\alpha} \sin(n\alpha\theta)\sin(m\alpha\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2\alpha}(R^{-\alpha} A_{-1} + R^{\alpha} A_1)$$

(c) En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression des A_n en fonction de $S(R,\theta)$ et de A_{-1}.

(d) Exprimer pour $r \in]0, R[$, $S(r,\theta)$ en fonction de $S(R,\theta)$ et de A_{-1}.

Partie III. Le but de cette partie est de construire la restriction à Ω_2 d'un élément de N en prolongeant $S_{|\Omega_1}$ défini dans la partie précédente.

1. Calculer $\frac{\partial S}{\partial r}(R,\theta)$ en fonction de $S(R,\theta)$ et de A_{-1}.

2. D'après la question II.4.d, l'opérateur S est entièrement déterminé dès que $S(R,\theta)$ pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{\alpha}[$ et A_{-1} sont connus. Pour A_{-1} fixé, on notera donc T, l'opérateur qui à $q = S(R,\theta)$ associe $T(q) = \frac{\partial S}{\partial r}(R,\theta)$. Donner l'expression de T.

3. On s'intéresse maintenant au prolongement de $S_{|\Omega_1}$ dans Ω_2, qu'on définit comme étant la solution p de

$$\Delta p = 0 \text{ dans } \Omega_2, \tag{7}$$

$$p = 0 \text{ sur } (\Gamma_1 \backslash \widetilde{\Gamma}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup (\Gamma_5 \backslash \widetilde{\Gamma}_5), \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} - T(p) = 0 \text{ sur } \mathcal{B}. \tag{9}$$

On note T_0 l'opérateur T correspondant à $A_{-1} = 0$. Le lien entre p et S se fait à travers l'opérateur T qui a été déterminé en fonction de S. Dans cette question on va montrer l'existence de p solution de (7), (8), (9).

(a) Montrer que p solution de (7), (8), (9) vérifie

$$\int_{\Omega_2} \nabla p \nabla q \, dx + \int_{\mathcal{B}} T_0(p) q \, d\sigma = L(q) \quad \forall q \in H^1(\Omega_2), \tag{10}$$

où L est une forme linéaire que l'on précisera.

(b) Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} T_0(p) q \, d\theta \geq 0.$$

(c) Montrer que (10) admet une solution unique $p \in H^1(\Omega_2)$.

4. Recollement d'espaces. On définit p tel que $p_{|\Omega_1} = p_1$ et $p_{|\Omega_2} = p_2$.

(a) Soit $p_1 \in H^1(\Omega_1)$ et $p_2 \in H^1(\Omega_2)$ tels que $p_{1|\mathcal{B}} = p_{2|\mathcal{B}}$. Montrer que $p \in H^1(\Omega)$.

Tournez la page S.V.P.

(b) Soit $p_1 \in H^2(\Omega_1)$ et $p_2 \in H^2(\Omega_2)$ tels que $p_{1|\mathcal{B}} = p_{2|\mathcal{B}}$ et pour $i = 1, 2$ $\left.\frac{\partial p_1}{\partial x_i}\right|_{\mathcal{B}} = \left.\frac{\partial p_2}{\partial x_i}\right|_{\mathcal{B}}$. Montrer que $p \in H^2(\Omega)$.

(c) Soit $p_1 \in H^2(\Omega_1)$ et $p_2 \in H^2(\Omega_2)$ tels que $p_{1|\mathcal{B}} = p_{2|\mathcal{B}}$ et $\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{\mathcal{B}} = \left.\frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{\mathcal{B}}$. Montrer que $p \in H^2(\Omega)$.

Partie IV. Résolution du problème dans Ω_2 par une méthode d'éléments finis $\mathbb{Q}_1$ où $\mathbb{Q}_1$ définit l'espace vectoriel des polynômes de deux variables de degré au plus un par rapport à chacune des variables.

On décompose le domaine Ω_2 en un maillage de quadrilatères de sorte que tous les cotés n'appartenant pas au bord de Ω_2 soient communs à exactement deux quadrilatères. Lors de cette procédure, on approxime $\mathcal{B}$ par une ligne polygonale. On note $(a_i)_{1 \leq i \leq N}$ les sommets n'étant pas sur la frontière où p est nul. Les sommets de cette frontière ne sont pas numérotés. On note K_j, $j = 1, .., M$ les quadrilatères du maillage et

$V_h = \{v \mid v_{|K_j} \in \mathbb{Q}_1(K_j), v$ continue en a_i pour $1 \leq i \leq n,$ v est nul sur les points de $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4\}$.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{Q}_1$?
2. Montrer que V_h est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $V_h \subset C^0(\Omega_2)$, puis que $V_h \subset H^1(\Omega_2)$.
4. On construit $p_h \in V_h$ une approximation de la solution du problème (10) qui vérifie

$$\int_{\Omega_2} \nabla p_h \nabla q_h \, dx + \int_{\mathcal{B}} T_0(p_h) q_h \, d\sigma = L(q_h) \quad \forall q_h \in V_h, \tag{11}$$

   (a) Montrer que (11) admet une solution unique.

   (b) Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une base de V_h. Exprimer, en utilisant cette base, le problème (11) sous la forme d'un système linéaire.