Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Devoir en temps libre

à rendre pour le 16 mars 2005

Le but est d'étudier divers aspects de l'espérance d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ arrêtée par des temps d'arrêts optimaux, c'est à dire maximisant l'espérance de la suite arrêtée sur la base de l'information dont on dispose quand on prend la décision et "inégalités du prophète" comparant l'espérance de gain optimal obtenue par un joueur qui s'arrête à l'instant n sur la base des observations antérieures à n et l'espérance de gain du prophète qui, connaissant toutes les observations (y compris celles du futur) s'arrête au maximum de la suite des observations.

Notations

On rappelle que par convention $\inf \varnothing = +\infty$. Dans tout le problème, P désigne une probabilité définie sur un espace mesurable $(\omega, \mathcal{F})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite adaptée si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers $n \geq 1$ et $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

On appelle temps d'arrêt toute application $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. On note T l'ensemble des temps d'arrêt bornés. Pour tout temps d'arrêt τ, on note

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 1, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite adaptée et τ un temps d'arrêt, on note X_τ la variable aléatoire définie par

$$X_\tau = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n 1\!\!1_{\{\tau=n\}},$$

c'est à dire que pour $n \geq 1$, X_τ vaut n sur l'ensemble $\{\tau = n\}$ et 0 sur l'ensemble $\{\tau = +\infty\}$.

Si a et b sont des nombres réels, on note $a \vee b$ le maximum de a et de b et $a \wedge b$ le minimum de a et de b. On note également $a^+ = a \vee 0$.

On rappelle enfin qu'une suite adaptée $(X_n)_{n\geq 1}$ est une surmartingale si pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n.$$

I Premières propriétés

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et qu'alors pour tout entier $n \geq 1$ $\{\tau \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$.

2. Montrer que si σ et τ sont des temps d'arrêts, alors $\sigma \vee \tau$ et $\sigma \wedge \tau$ sont des temps d'arrêts et que si $\sigma \leq \tau$, alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

3. Montrer que si τ est un temps d'arrêt et si X est une variable aléatoire, X est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_\tau$ si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$, X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$.

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite adaptée de variables aléatoires et τ un temps d'arrêt. Montrer que X_τ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\tau$.

5. Montrer que si τ est un temps d'arrêt et si X est une variable aléatoire intégrable, $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ sur l'ensemble $\{\tau = n\}$.

6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite adaptée de variables aléatoires, A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ et $\sigma : \Omega \to \overline{\mathbb{N}^*}$ l'application définie par $\sigma(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in A\}$. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, τ et $\tau = \sigma \wedge N$ sont des temps d'arrêt.

II Temps d'arrêt optimal pour une suite finie

On fixe un entier N, une suite adaptée $(X_n)_{1\leq n\leq N}$ de variables aléatoires intégrables et on cherche à maximiser $\mathbb{E}X_\tau$ pour $\tau \in T, \tau \leq N$. Pour tout entier $n \in \{1, \ldots, n\}$, on note T_N^n l'ensemble des temps d'arrêts τ tels que $n \leq \tau \leq N$ et $T_N = T_N^1$. On définit par récurrence décroissante la suite de variables aléatoires $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ en posant

$$S_N = X_N \text{ puis pour tout } n \in \{N-1, \ldots, 1\}, \quad S_n = \max(X_n, \mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]).$$

Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$, on note

$$\tau_n = \inf\{i \geq n : X_i = S_i\}.$$

1. Montrer que $\tau_n \in T_N^n$ et que $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ est la plus petite surmartingale supérieure ou égale à $(X_n)_{1\leq n\leq N}$.

2. Montrer que tout $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ et que pour tout temps d'arrêt $\sigma \in T_N^n$, $\mathbb{E}[X_\sigma|\mathcal{F}_n] \leq S_n$.

3. Montrer par récurrence décroissante sur n que pour tout entier $n \in \{1,\ldots,N\}$, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] = S_n.$$

En déduire un temps d'arrêt optimal dans T_N, c'est à dire un élément τ^* de T_N tel que $\mathbb{E}X_{\tau^*} = \sup\{\mathbb{E}X_\tau : \tau \in T_N\}$.

III Inégalité du prophète par seuillage

Dans cette partie on suppose que les variables aléatoires $(X_n)_{1\leq n\leq N}$ sont positives, intégrables et indépendantes. Soit

$$X_N^* = \sup_{1\leq n\leq N} X_n.$$

On note m une médiane de X_N^*, c'est à dire un nombre réel défini par les inégalités

$$P(X_N^* < m) = q \leq \frac{1}{2} \text{ et } P(X_N^* > m) = p \leq \frac{1}{2}.$$

Pour toute constante $c \geq 0$, on note

$$\tau(c) = \inf\{n \leq N : X_n \geq c\} \wedge N, \sigma(c) = \inf\{n \leq N : X_n > c\} \wedge N,$$

$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(c)} = \mathbb{E}\big(X_{\tau(c)}1\!\!1_{\{X_{\tau(c)}\geq c\}}\big), \quad \mathbb{E}^+ X_{\sigma(c)} = \mathbb{E}\big(X_{\sigma(c)}1\!\!1_{\{X_{\sigma(c)}>c\}}\big).$$

Soit T_N^s l'ensemble des temps d'arrêt de la forme $\tau(c)$ et $\sigma(c)$ pour les constantes $c \geq 0$. On note enfin $\beta = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+$.

1. Montrer que $\mathbb{E}X_N^* \leq m + \beta$.

2. Montrer que

$$\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} = mp + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}} \geq mp + \beta(1-p)$$

et que

$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} \geq m(1-q) + \beta q.$$

3. En déduire que si $\beta \geq m$, $\mathbb{E}X_N^* \leq 2\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} \leq 2\mathbb{E}X_{\sigma(m)}$ et que si $\beta \leq m$, $\mathbb{E}X_N^* \leq 2\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} \leq 2\mathbb{E}X_{\tau(m)}$.

4. En déduire les inégalités du prophète:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_N^* &\leq 2\sup\{\mathbb{E}X_\tau : \tau \in T_N^s\} \qquad (1) \\ &\leq 2\sup\{\mathbb{E}X_\tau : \tau \in T_N\} \qquad (2) \end{aligned}$$

5. Montrer que dans l'inégalité (2) la constante 2 est optimale. (On pourra considérer la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ avec $X_1 = 1$, $X_2 = M\mathbb{1}_{A_M}$ avec $P(A_M) = 1/M$ et $X_k = 0$ pour $k \geq 3$.) On admettra que cette constante 2 cesse d'être optimale si on demande en outre que les variables aléatoires $(X_n)_{1\leq n\leq N}$ soient de même loi.

6. Dans cette question, on suppose que pour chaque entier $N \geq 2$, les variables aléatoires $(X_n^{(N)})_{1\leq n\leq N}$ sont indépendantes de même loi: étant donnés des réels $a \in]0,1[$, $b > 0$, $c > 0$ tels que $b + c < N$, on suppose que

$$P(X_1^{(N)} = 0) = 1 - \frac{b+c}{N}, P(X_1^{(N)} = a) = \frac{c}{N}, P(X_1^{(N)} = 1) = \frac{b}{N}.$$

   (a) Montrer que

$$E = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\big(\sup_{1\leq i\leq N} X_i^{(N)}\big) = a(e^{-b} - e^{-(b+c)}) + 1 - e^{-b}.$$

   (b) Montrer que

$$W(a) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}X_{\tau(a)}^{(N)} = \frac{ac+b}{a+b}(1 - e^{-(b+c)})$$

   et

$$W(1) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}X_{\tau(1)}^{(N)} = 1 - e^{-b}.$$

   (c) Montrer que si $a^* = \frac{(b+c)(1-e^{-b}) - be^{-b}(1-e^{-c})}{c(1-e^{-(b+c)})}$, on a $W(1) = W(a^*)$ et $0 < a^* < 1$.

   (d) Dans le cas $a = a^*$, déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\sup(X_n^N)_{1\leq n\leq N}}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\}}.$$

   En déduire que la constante 2 ne peut pas être améliorée dans l'inégalité (1), même lorsqu'on impose en outre aux variables aléatoires d'avoir la même loi.

FIN

Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Corrigé du devoir en temps libre

I Premières propriétés

1.
   - Soit τ un temps d'arrêt (au sens de la définition donnée par l'énoncé), et soit n un entier naturel non nul. On a
     $$\{\tau \leq n\} = \cup_{k=1}^{n} \{\tau = k\}.$$
     Par définition d'un temps d'arrêt $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout k entre 1 et n. Mais comme la suite des tribus $(\mathcal{F}_k)$ est croissante, on a pour tout k entre 1 et n $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, et donc $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$. Comme $\{\tau \leq n\}$ s'écrit comme réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}_n$, il est dans $\mathcal{F}_n$.
   - Réciproquement, on peut écrire
     $$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \backslash \{\tau \leq n-1\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\tau \leq n-1\}^c.$$
     Ainsi, si pour tout entier $k \geq 1$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, alors $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$. Alors, comme toute tribu est stable par complémentation et par intersection finie, $\{\tau = n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$.
   - On vient de voir que pour un temps d'arrêt τ, on a pour tout n: $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Comme τ est à valeurs entières, l'événement $\{\tau \geq n+1\}$ est le complémentaire de l'événement $\{\tau \leq n\}$ et est donc également dans $\mathcal{F}_n$.

2. Soit σ et τ deux temps d'arrêts, n un entier naturel non nul
   - $$\{\sigma \vee \tau \leq n\} = \{\max(\sigma, \tau) \leq n\} = \{\sigma \leq n\} \cap \{\tau \leq n\}$$
     Mais comme σ et τ sont des temps d'arrêts, les deux événements du membre de droite sont dans $\mathcal{F}_n$, donc leur intersection est dans la tribu $\mathcal{F}_n$. Comme n est quelconque, on peut donc dire que $\sigma \wedge \tau$ est un temps d'arrêt.
   - $$\{\sigma \wedge \tau \leq n\} = \{\min(\sigma, \tau) \leq n\} = \{\sigma \leq n\} \cup \{\tau \leq n\}$$
     Mais comme σ et τ sont des temps d'arrêts, les deux événements du membre de droite sont dans $\mathcal{F}_n$, donc leur réunion est dans la tribu $\mathcal{F}_n$. Comme n est quelconque, on peut donc dire que $\sigma \wedge \tau$ est un temps d'arrêt.

- Supposons maintenant que $\sigma \leq \tau$. Soit $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Comme $\sigma \leq \tau$, on a $\{\tau \leq n\} \cap A = (A \cap \{\sigma \leq n\}) \cap \{\tau \leq n\}$. Comme $A \in \mathcal{F}_\sigma$, $A \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. D'après la caractérisation des temps d'arrêt, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. On en déduit que $\{\tau \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_n$. Comme n est quelconque, $A \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Dire que " X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$", c'est dire que la restriction de X à la partie de Ω: $\{\tau = n\}$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Notons X' la restriction de X à $\{\tau = n\}$. Dire que X' est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, c'est dire que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$: $X'^{-1}(B) \in \mathcal{F}_n$. Mais $X'^{-1}(B) = X^{-1}(B) \cap \{\tau = n\}$. Donc dire que " X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$", c'est dire que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

   - Supposons donc que pour tout n et pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

     On va montrer que X est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. Pour cela, il suffit de voir que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$. Soit $n \geq 1$: d'après le raisonnement préliminaire $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Comme celà vaut pour tout n, $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$ par définition de $\mathcal{F}_\tau$, ce qui achève la preuve.

   - Réciproquement, supposons que X est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. Soit $n \geq 1$ et B un borélien de $\mathbb{R}$. Comme X est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$. Par définition de $\mathcal{F}_\tau$, cela implique que $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, ce qui achève la preuve.

4. La restriction de X_τ à $\{\tau = n\}$ coincide avec X_n sur l'ensemble $\{\tau = n\}$. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$: l'image réciproque de B par la restriction de X_τ à $\{\tau = n\}$ est donc $X_n^{-1}(B) \cap \{\tau = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{\tau = n\}$. Comme X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\{X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$. Comme τ est un temps d'arrêt $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Finalement, $X_n^{-1}(B) \cap \{\tau = n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$, ce qui signifie que la restriction de X_τ à $\{\tau = n\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. D'après la question précédente, celà signifie que X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

5. Soit Ψ la variable aléatoire définie par

$$\Psi = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]1\!\!1_{\{\tau=n\}}.$$

   Par définition, Ψ coincide avec $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ sur l'ensemble $\{\tau = n\}$. Pour résoudre la question posée, il suffit donc de montrer que $\Psi = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1\!\!1_{\{\tau=n\}\}}$.

   Avant celà, on peut remarquer que l'événement $A = \{\tau = n\}$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable: en effet pour $k \neq n$, on a $A \cap \{\tau = k\} = \varnothing \in \mathcal{F}_k$, tandis que pour $k = n$, on a $A \cap \{\tau = k\} = \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Ainsi $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1\!\!1_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}[X1\!\!1_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}_\tau]$, donc il suffit de montrer que

$$\Psi = \mathbb{E}[X1\!\!1_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}_\tau].$$

- Montrons d'abord que Ψ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable: D'après la question 3), il s'agit de montrer que pour tout k, Ψ restreinte à $\{\tau = k\}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable. Mais Ψ restreinte à $\{\tau = n\}$ vaut $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]1\!\!1_{\tau=n}$, qui est évidemment $\mathcal{F}_n$-mesurable, comme produit de deux variables $\mathcal{F}_n$-mesurable (conséquences immédiates respectivement de la définition de l'espérance conditionnelle et d'un temps d'arrêt). D'un autre côté, Ψ restreinte à $\{\tau = k\}$ est, lorsque $k \neq n$, la fonction constamment nulle, qui est évidemment $\mathcal{F}_k$-mesurable. Ainsi, Ψ est bien $\mathcal{F}_\tau$-mesurable
- Ψ est intégrable, car c'est le produit de $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ qui est intégrable, et de $1\!\!1_{\tau=n}$, qui est bornée.
- Reste à montrer que pour tout événement A $\mathcal{F}_\tau$-mesurable, on a $\mathbb{E}[\Psi 1\!\!1_A] = \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A]$. Or

  $$\mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A] = \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}\cap A}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau=n\}\cap A}],$$

  où la dernière égalité provient du fait que $\{\tau = n\} \cap A$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable (car $A \in \mathcal{F}_\tau$), ce qui donne finalement

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau=n\}\cap A}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A] \\ &= \mathbb{E}[\Psi 1\!\!1_A] \end{aligned}$$

6. Soit $n \geq 1$. On a

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in A\}.$$

Pour tout k $\{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_\|$ car $(X_k)_{k\geq 1}$ est adaptée; or $\mathcal{F}_\| \subset \mathcal{F}_n$, donc $\{\tau \leq n\}$ est réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}_n$ et est donc dans $\mathcal{F}_n$, ce qui prouve que τ est un temps d'arrêt.

D'autre part la variable aléatoire constante N est un temps d'arrêt car pour tout n $\{N = n\} \in \{\varnothing, \Omega\} \subset \mathcal{F}_n$, ainsi d'après la question 2) $\tau = \sigma \wedge n$ est aussi un temps d'arrêt.

II Temps d'arrêt optimal pour une suite finie

1.
- Évidemment $\{i \geq n : X_i = S_i\} \subset [n, +\infty[$, donc sa borne inférieure τ_n dépasse n. D'autre part, par définition $S_N = X_N$ donc $N \in \{i \geq n : X_i = S_i\}$, d'où $\tau_n \leq N$. On a donc bien $\tau_n \in T_N^n$.
- Comme $S_n = \max(X_n, \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))$, on a $S_n \leq \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))$, donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est bien une surmartingale, elle est bien supérieure ou égale à X_n, toujours car $S_n = \max(X_n, \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))$.
- Comme X_n et $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables (respectivement grâce à l'adaptation de (X_n) et la définion de l'espérance conditionnelle), S_n l'est aussi. Ainsi $(S_n)_{n\geq 1}$ est une surmartingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{1\leq n\leq N}$.

- Soit $(Y_n)_{1\leq n\leq N}$ une surmartingale supérieure ou égale à X_n. Montrons par récurrence décroissante sur n que $S_n \leq Y_n$. Pour $n = N$, c'est acquis car $S_N = X_N \leq Y_N$. Montrons que l'hypothèse au rang $n+1$ entraîne l'hypothèse au rang n: on a $Y_n \geq \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ car $(Y_n)_{1\leq n\leq N}$ est une surmartingale. D'après l'hypothèse de récurrence $Y_{n+1} \geq S_{n+1}$, or l'espérance conditionnelle conserve l'ordre, donc $Y_n \geq \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Mais par hypothèse $Y_n \geq X_n$, donc finalement $Y_n \geq \max(\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n), X_n) = S_n$.

2. Par construction, on a pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$: $X_k \leq S_k$. Par suite, pour tout temps d'arret $\sigma \in Tn_N$, on a $X_\sigma \leq S_\sigma$. On a alors évidemment

$$\mathbb{E}[X_\sigma|\mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[S_\sigma|\mathcal{F}_n].$$

Il suffit donc alors de montrer que $E[S_\sigma|\mathcal{F}_n] \leq S_n$. Mais comme $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ est une surmartingale, que n et σ sont des temps d'arrêts bornés (par N), avec $n \leq \sigma$, cette dernière inégalité découle immédiatement du théorème de Hunt.

3. Montrons par récurrence décroissante sur n que pour tout entier $n \in \{1, \ldots, N\}$, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] = S_n.$$

Pour $n = N$, on a par définition de S_N: $X_N = S_N$, d'où par définition de τ_N: $\tau_N = N$. Ainsi $\mathbb{E}[X_{\tau_N}|\mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_N] = X_N = S_N$, où la pénultième inégalité provient de l'adaptation de la suite. Supposons l'hypothèse réalisée au rang $n+1$ et voyons comment passer de $n+1$ un à n: si $X_n = S_n$, on a $\tau_n = n$, sinon on a $\tau_n = \tau_{n+1}$. Ainsi

$$X_{\tau_n} - X_{\tau_n+1} = (S_n - X_{\tau_n+1})1\!\!1_{\{X_n=S_n\}}$$

Conditionnons cette égalité par rapport à $\mathcal{F}_n$: comme S_n et X_n sont $\mathcal{F}_n$-mesurables, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_n] = (S_n - \mathbb{E}[X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_n])1\!\!1_{\{X_n=xS_n\}}$$

Maintenant, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$$

d'où

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] - S_n = (S_n - S_n)1\!\!1_{\{X_n=S_n\}} = 0,$$

ce qui donne l'hypothèse au rang n.

Posons alors $\tau^* = \tau_1$. D'après la question 1) τ^* est bien dans T_N. D'après la première partie de la présente question, on a $\mathbb{E}[X_{\tau^*}|\mathcal{F}_1] = S_1$, d'où $\mathbb{E}[X_{\tau^*} = \mathbb{E}S_1$. Soit maintenant $\tau \in T_N = T_N^1$. D'après la question 2), on a $\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\infty] \leq S_1$, d'où $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}S_1$. Ceci montre bien que τ^* réalise bien le maximum des $\mathbb{E}(X_\tau)$ lorsque τ décrit T_N.

III Inégalité du prophète par seuillage

1. Soit i entre 1 et N: on a $X_k - m \leq (X_k - m)^+ \leq \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+$, soit $X_k \leq m + \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+$ On en déduit que

$$X_N^* = \sup_{1 \leq k \leq N} X_k \leq m + \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+,$$

d'où en prenant l'espérance:

$$\mathbb{E} X_N^* \leq m + \beta.$$

2. Remarquons que si $X_n^* < c$, alors $\{n \leq N : X_n > c\} \neq \varnothing$ et donc il existe un plus petit entier n entre 1 et N tel que $X_n > c$ et cet entier est $\sigma(c)$: on a alors $X_{\sigma(c)} > c$. Inversement, si $X_{\sigma(c)} \leq c$, c'est donc que $\sigma(c) \notin \{n \leq N : X_n > c\}$, ce qui implique que $\{n \leq N : X_n > c\} \neq \varnothing$, et donc que $X_n^* \geq c$. Ainsi on a

$$\{X_{\sigma(c)}\} > c = \{X_N^* > c\}.$$

Alors

$$\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} = \mathbb{E} X_{\sigma(m)} 1\!\!1_{\{X_{\sigma(c)}\} > c\}} = \mathbb{E} X_{\sigma(m)} 1\!\!1_{\{X_N^* > c\}} = \mathbb{E}(X_{\sigma(m)} - m) 1\!\!1_{\{X_N^* > m\}} + m \mathbb{E} 1\!\!1_{\{X_N^* > m\}}$$

Mais lorsque $X_N^* > m$, alors on a

$$X_{\sigma(m)} - m = \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}}$$

En effet pour $i < \sigma(m)$, on a $X_i - m \leq 0$, donc $(X_i - m)^+ = 0$ tandis que pour $i > \sigma(m)$, on a $1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}} = 0$. Ne reste donc dans la somme que le terme pour $i = \sigma(m)$, et dans ce cas $(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}} = (X_{\sigma(m)} - m) \times 1$. Dans les cas $X_N^* > m$, on a donc

$$(X_{\sigma(m)} - m) 1\!\!1_{X_N^* > m} = \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}}$$

L'identité demeure valable lorsque $X_N^* \leq m$: le même raisonnement que précédemment montre alors que les deux termes sont nuls. On obtient donc

$$\mathbb{E}(X_{\sigma(m)} - m) 1\!\!1_{X_N^* > m} = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}},$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} &= m \mathbb{E} 1\!\!1_{\{X_N^* > m\}} + \mathbb{E}(X_{\sigma(m)} - m) 1\!\!1_{\{X_N^* > m\}} \\
&= m P(X_N^* > m) + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}} \\
&= mp + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}}.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de minorer $\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i-m)^+1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}}$. Pour tout i entre 1 et N, l'événement $\{\sigma(m)>i-1\}$ est $\sigma(X_1,\ldots,X_{i-1})$-mesurable et est donc indépendant de X_i: on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i-m)^+1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}} &= \mathbb{E}(X_i-m)^+1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}}\\ &= \mathbb{E}(X_i-m)^+P(\sigma(m)>i-1)\\ &\geq \mathbb{E}(X_i-m)^+P(\sigma(m)>N-1).\end{aligned}$$

Mais, comme on l'a vu précédemment $(X_N^*\leq m)\Longrightarrow(\sigma(m)=N)$, donc

$$\mathbb{E}(X_i-m)^+1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}}\geq\mathbb{E}(X_i-m)^+P(X_N^*\leq m)=(1-p)\mathbb{E}(X_i-m)^+,$$

d'où en sommant sur i de 1 à N:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i-m)^+1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}}\geq\sum_{i=1}^{N}(1-p)\mathbb{E}(X_i-m)^+=(1-p)\beta,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.
De la même manière, on montre pour tout c:

$$\{X_{\tau(c)}\geq c\}=\{X_N^*\geq c\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^+X_{\tau(m)} &= \mathbb{E}X_{\tau(m)}1\!\!1_{\{X_{\tau(c)}\}>c\}}\\ &= \mathbb{E}X_{\tau(m)}1\!\!1_{\{X_N^*\geq m\}}\\ &= \mathbb{E}(X_{\tau(m)}-m)1\!\!1_{\{X_N^*\geq m\}}+m\mathbb{E}1\!\!1_{\{X_N^*\geq m\}}\\ &= \mathbb{E}(X_{\tau(m)}-m)1\!\!1_{\{X_N^*\geq m\}}+m(1-q)\end{aligned}$$

Alors, on montre

$$(X_{\tau(m)}-m)1\!\!1_{\{X_N^*\geq m\}}=\sum_{i=1}^{N}(X_i-m)^+1\!\!1_{\tau(m)>i-1},$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{\tau(m)}-m)1\!\!1_{\{X_N^*\geq m\}} &= \sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i-m)^+1\!\!1_{\tau(m)>i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i-m)^+\mathbb{E}1\!\!1_{\tau(m)>i-1}\\ &\geq (\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i-m)^+)\mathbb{E}1\!\!1_{\tau(m)>N-1}\\ &\geq \beta P(\tau(m)>N-1)\\ &\geq \beta P(X_N^*<m)\\ &= \beta q\end{aligned}$$

3. Comme les variables aléatoires (X_k) sont à valeurs positives, $X_{\tau(m)}$ et $X_{\sigma(m)}$ le sont aussi, d'où

$$\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} = \mathbb{E}X_{\sigma(m)} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma(m)} > m\}} \leq \mathbb{E}X_{\sigma(m)}$$

et

$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} = \mathbb{E}X_{\tau(m)} \mathbb{1}_{\{X_{\tau(m)} \geq m\}} \leq \mathbb{E}X_{\tau(m)}.$$

   - Supposons $\beta \geq m$. En combinant les inégalités des questions 1 et 2, on a

     $$2\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} - \mathbb{E}X_N^* \geq 2(mp + \beta(1-p)) - (m+\beta) = (1-2p)(\beta - m) \geq 0,$$

     soit $\mathbb{E}X_N^* \leq 2\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)}$.
   - Supposons $\beta \leq m$. En combinant les inégalités des questions 1 et 2, on a

     $$2\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} - \mathbb{E}X_N^* \geq m(1-q) + \beta q - (m+\beta) = (1-2q)(m-\beta) \geq 0,$$

     soit $\mathbb{E}X_N^* \leq 2\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)}$.

4. Grâce à la question précédente, on a quelle que soit la position relative de β et m:

$$\mathbb{E}X_N^* \leq 2 \max(\mathbb{E}X_{\sigma(m)}, \mathbb{E}X_{\tau(m)}).$$

   Les deux inégalités demandées résultent alors des inclusions $\{\sigma, \tau\} \subset T_N^s \subset T_N$.

5. Considérons la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ avec $X_1 = 1$, $X_2 = M\mathbb{1}_{A_m}$ avec $P(A_m) = 1/M$ et $X_k = 0$ pour $k \geq 3$. On a pour tout $N \geq 2$: $X_N^* = \max(1, X_2)$. X_N^* vaut donc $\max(1, M)$ avec probabilité $1/M$, 1 avec probabilité $1 - 1/M$. D'où

$$\mathbb{E}X_N^* = 1 - \frac{1}{M} + \frac{\max(1,M)}{M}.$$

   Pour $M \geq 1$, on a donc $\mathbb{E}X_N^* = 2 - \frac{1}{M}$.

   Construisons par récurrence descendante la suite S_n définie dans la partie II: pour $k \in \{3, \dots, N\}$, on a $S_k = 0$, tandis que $S_2 = \max(X_2, \mathbb{E}(S_3|\mathcal{F}_2) = \max(X_2, 0) = X_2$, et $S_1 = \max(X_1, \mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1) = \max(X_1, \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1) = \max(X_1, \mathbb{E}X_2) = \max(1,1) = 1$. Ainsi, d'après le résultat de la partie II, on a $\sup\{\mathbb{E}X_\tau; \tau \in T_N\} = 1$, d'où

$$\frac{\mathbb{E}X_N^*}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau; \tau \in T_N\}} = 2 - \frac{1}{M}.$$

   M pouvant être pris aussi grand que l'on veut, on voit donc que 2 ne peut être remplacé par une constante plus petite dans l'inégalité (2).

6. (a) Posons $M_N = \sup_{1\leq i\leq N} X_i^{(n)}$. Cette borne supérieure est en fait un maximum; comme les X_i prennent leurs valeurs dans $\{0,1,a\}$, M_N aussi. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M_N &= aP(M_N = a) + 1P(M_N = 1)\\ &= a(P(M_N < 1) - P(M_N < a)) + 1 - P(M_N < 1)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}P(M_n < 1) &= P(\cap_{i=1}^n \{X_i^{(N)} < 1\})\\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i^{(N)} < 1)\\ &= (1 - \frac{b}{N})^N\end{aligned}$$

On utilise ici l'indépendance des X_i. De même

$$\begin{aligned}P(M_n < a) &= P(\cap_{i=1}^n \{X_i^{(N)} < a\})\\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i^{(N)} < a)\\ &= (1 - \frac{b+c}{N})^N\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{E}M_N = a((1-\frac{b}{N})^N - (1-\frac{b+c}{N})^N) + 1 - (1-\frac{b}{N})^N$$

Comme pour tout x réel, on a $\lim_{N\to+\infty}(1-x/N)^n = e^{-x}$, on obtient $\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}M_N = a(e^{-b} - e^{-(b+c)}) + 1 - e^{-b}$.

(b) Pour $i \in \{1,\ldots,N-1\}$, en utilisant l'indépendance, on a

$$P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = a) = P(\tau(a) = i, X_i^{(N)} = a)(1-b/N)^{i-1}\frac{c}{N},$$

tandis que

$$P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = 1) = P(\tau(a) = i, X_i^{(N)} = 1)(1-b/N)^{i-1}\frac{b}{N},$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{\tau(a)}^{(N)} | \tau(a) < N] &= \frac{\sum_{i=1}^n aP(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = a) + P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = 1)}{\sum_{i=1}^n P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = a) + P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = 1)}\\ &= \frac{a\times c/N + 1\times b/N}{c/N + b/N}\\ &= \frac{ac+b}{c+b}.\end{aligned}$$

De même $\mathbb{E}[X_{\tau(a)}^{(N)}|\tau(a)<N]=\frac{ac+b}{N}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_{\tau(a)}^{(N)} &= \frac{ac+b}{c+b}P(\tau(a)<N)+\frac{ac+b}{N}P(\tau(a)=N)\\ &= \frac{ac+b}{c+b}(1-P(\tau(a)=N)+\frac{ac+b}{N}P(\tau(a)=N).\end{aligned}$$

Mais

$$P(\tau(a)=N)=P(\forall i<N:X_i^{(N)}=0)=(1-\frac{b+c}{N})^{N-1}=\frac{1}{(1-\frac{b+c}{N})^{N-1}}(1-\frac{b+c}{N})^N$$

tend vers $e^{-(b+c)}$ lorsque N tend vers $+\infty$, d'où

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}X_{\tau(a)}^{(N)}=\frac{ac+b}{c+b}(1-e^{-(b+c)}).$$

L'autre identité est plus simple: il suffit de remarquer que

$$1\!\!1_{\tau(1)<N}\le X_{\tau(1)}^{(N)}\le 1\!\!1_{\tau(1)<N}+1\!\!1_{\tau(1)=N}1\!\!1_{X_N^N>0}\le 1\!\!1_{\tau(1)<N}+1\!\!1_{X_N^N>0},$$

d'où

$$P(\tau(1)<N)\le\mathbb{E}X_{\tau(1)}^{(N)}\le P(\tau(1)<N)+\frac{b+c}{N},$$

ce qui entraîne

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}X_{\tau(1)}^{(N)}=\lim_{N\to+\infty}P(\tau(1)<N)=\lim_{N\to+\infty}1-(1-b/N)^{N-1}=1-e^{-b}.$$

(c) Posons $f(x)=\frac{(1-e^{-(b+c)})(b+xc)}{b+c}$. f est une fonction affine strictement croissante, avec $f(0)=\frac{(1-e^{-(b+c)})b}{b+c}<1-e^{-(b+c)}$, car

$$1-e^{-(b+c)}-\frac{(1-e^{-(b+c)})b}{b+c}=b(\frac{1-e^{-b}}{b}-\frac{1-e^{-(b+c)}}{b+c})>0,$$

car la fonction $x\mapsto\frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction exponentielle.) et $f(1)=1-e^{-(b+c)}$. Posons $a^*=f^{-1}(W(1))=\frac{(b+c)(1-e^{-b})-be^{-b}(1-e^{-c})}{c(1-e^{-(b+c)})}$. Comme $f(1)=1-e^{-(b+c)}>1-e^{-b}=W(1)>f(0)$, on a $0<a^*<1$. Par construction, on a $W(a^*)=W(1)$.

(d) Il s'agit de calculer $\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)}:\tau\in T_N^s\}$. Comme les $X_i^{(N)}$ sont à valeurs dans $\{0,a,1\}$, il est facile de voir que

- $\tau(0)=1$.
- Pour $c\in]0,a]$, on a $\tau(c)=\tau(a)$.
- Pour $c\in]a,1]$, on a $\tau(c)=\tau(1)$.
- Pour $c\in]1,+\infty[$, on a $\tau(c)=N$.

- Pour $c \in [0, a[$, on a $\sigma(c) = \tau(a)$.
- Pour $c \in [a, 1[$, on a $\sigma(c) = \tau(1)$.
- Pour $c \in [1, +\infty[$, on a $\sigma(c) = N$.

Ainsi

$$\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\} = \max(\mathbb{E}_N^{(N)}, \mathbb{E}_1^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(1)}^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(a)}^{(N)}).$$

Il est aisé de voir que $\mathbb{E}_N^{(N)} = \mathbb{E}_1^{(N)} = \frac{ac+b}{N}$. On a donc

$$\frac{\mathbb{E}M_N}{\max(\mathbb{E}_N^{(N)}, \mathbb{E}_1^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(1)}^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(a)}^{(N)})} = \frac{\mathbb{E}M_N}{\max(\frac{ac+b}{N}, \mathbb{E}_{\tau(1)}^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(a)}^{(N)})}.$$

D'où

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}M_N}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\}} = \frac{1 - e^{-b} + a(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{\max(W(1), W(a))}.$$

Dans ce qui suit, on va choisir $a = a^*$: on a alors $W(1) = W(a) = 1 - e^{-b}$ et

$$\frac{1 - e^{-b} + a(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{\max(W(1), W(a))} = \frac{1 - e^{-b} + a^*(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{1 - e^{-b}} = 1 + \frac{a^*(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{1 - e^{-b}}.$$

Notons pour b, c positifs

$$R(b, c) = 1 + \frac{a^*(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{1 - e^{-b}}.$$

Un simple développement limité permet de montrer que

$$\lim_{x\to 0} R(bx, cx) = 1 + \frac{b}{b+c}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On peut trouver un entier n tel que $1 + \frac{n}{n+1} > 2 - \epsilon$. Comme $\lim_{x\to 0} R(nx, x) = 1 + \frac{n}{n+1}$, on peut trouver $x \in]0, \frac{1}{n+1}[$, avec $R(nx, x) > 2 - \epsilon$. En prenant $b = nx$, $c = x$ et $a = \frac{(n+1)(1-e^{-nx}) - ne^{-nx}(1-e^{-x})}{1-e^{-(n+1)x}}$, on obtient une suite de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que, pour N suffisamment grand, on ait

$$\frac{\mathbb{E}M_N}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\}} > 2 - \epsilon,$$

ce qui montre que la constante 2 est optimale, même au sein de la classe des suites de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

FIN