PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Les parties II à V du problème sont indépendantes. Le but est d'étudier divers aspects de l'espérance d'une suite $(X_n, n \geq 1)$ arrêtée par des temps d'arrêt τ : détermination de temps d'arrêt optimaux, c'est à dire maximisant l'espérance de la suite arrêtée sur la base de l'information dont on dispose quand on prend la décision et "inégalités du prophète" comparant l'espérance de gain optimal obtenue par un joueur qui s'arrête à l'instant n sur la base des observations antérieures à n et l'espérance de gain du prophète qui, connaissant toutes les observations (y compris celles du futur) s'arrête au maximum de la suite des observations.

Notations

On rappelle que par convention $\inf \emptyset = +\infty$. Dans tout le problème, P désigne une probabilité définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ désigne une variable aléatoire, on note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X et pour tout ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}$, on note $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$.

Sur l'ensemble Ω on fixe une *filtration*, c'est à dire une suite croissante $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (telles que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$) et on note $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendrée par $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$.

Tournez la page S.V.P.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers $n \geq 1$ et $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Un *temps d'arrêt* est une application $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. On note T (respectivement $\bar{T}$) l'ensemble des temps d'arrêt bornés (respectivement de tous les temps d'arrêt). Pour tout temps d'arrêt τ, on note

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 1,\ A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Si a et b sont des nombres réels, on note $a \vee b$ (respectivement $a \wedge b$) le maximum (respectivement le minimum) de a et b. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, on note $X^+ = X \vee 0$, $X^- = (-X) \vee 0$ et si X est intégrable, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{F}$, on note A^c le complémentaire de A, 1_A la fonction indicatrice de A. Si $\mathcal{G}$ désigne une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et si X est une variable aléatoire intégrable, on note $E(X|\mathcal{G})$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ et pour toute variable aléatoire Y, on note $E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires intégrables. On dit que cette suite est *adaptée* si pour tout entier $n \geq 1$ la variable aléatoire X_n est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$. Si $(X_n, n \geq 1)$ est une suite adaptée de variables aléatoires intégrables et si τ est un temps d'arrêt, on note X_τ la variable aléatoire définie par $X_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 1_{\{\tau=n\}}$, c'est à dire :

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) \text{ sur l'ensemble } \{\tau = n\},\ 1 \leq n < +\infty\,, \\ 0 \text{ sur l'ensemble } \{\tau = +\infty\}. \end{cases}$$

On note

$$X^* = \sup_{n \geq 1} X_n$$

et pour tout entier $N \geq 1$, on note

$$X_N^* = \sup_{1 \leq n \leq N} X_n$$

On rappelle enfin qu'une suite adaptée $(X_n, n \geq 1)$ est une surmartingale si pour tout entier $n \geq 1$, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$.

I - Premières propriétés

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et qu'alors pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$.

2. Montrer que si σ et τ sont des temps d'arrêt, $\sigma \vee \tau$ et $\sigma \wedge \tau$ sont des temps d'arrêt et que si $\sigma \leq \tau$, alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

3. Montrer que si τ est un temps d'arrêt et si X est une variable aléatoire, X est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_\tau$ si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$, X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$.

4. Soit $(X_n\,,\,n \geq 1)$ une suite adaptée de variables aléatoires et τ un temps d'arrêt. Montrer que X_τ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\tau$.

5. Montrer que si τ est un temps d'arrêt et si X est une variable aléatoire intégrable, $E(X|\mathcal{F}_\tau) = E(X|\mathcal{F}_n)$ sur l'ensemble $\{\tau = n\}$.

6. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite adaptée de variables aléatoires, A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ et $\sigma : \Omega \to \overline{\mathbb{N}^*}$ l'application définie par $\sigma(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in A\}$. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, σ et $\tau = \sigma \wedge N$ sont des temps d'arrêt.

II - Temps d'arrêt optimal pour une suite finie

On fixe un entier N, une suite adaptée $(X_n, 1 \leq n \leq N)$ de variables aléatoires intégrables et on cherche à maximiser $\mathbb{E}(X_\tau)$ pour $\tau \in T, \tau \leq N$.

Pour tout entier $n \in \{1, \cdots N\}$, on note T_N^n l'ensemble des temps d'arrêt τ tels que $n \leq \tau \leq N$ et $T_N = T_N^1$. On définit par récurrence décroissante la suite de variables aléatoires $S_n, 1 \leq n \leq N$ en posant

$$S_N = X_N \ \text{ puis pour tout } \ n \in \{N-1, \cdots, 1\},\ S_n = \max(X_n, \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))\,.$$

Pour tout $n \in \{1, \cdots, N\}$, on note

$$\tau_n = \inf\{i \geq n : X_i = S_i\}\,.$$

1. Montrer que $\tau_n \in T_N^n$ et que $(S_n, 1 \leq n \leq N)$ est la plus petite surmartingale supérieure ou égale à $(X_n, 1 \leq n \leq N)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \{1, \cdots, N-1\}$ et tout temps d'arrêt $\sigma \in T_N^n$, $E(X_\sigma|\mathcal{F}_n) \leq S_n$.

3. Montrer par récurrence décroissante sur n que pour tout entier $n \in \{1, \cdots, N\}$,

$$E\left(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n\right) = S_n.$$

En déduire un temps d'arrêt optimal dans T_N, c'est à dire un élément τ^* de T_N tel que $E(X_{\tau^*}) = \sup\{\mathbb{E}(X_\tau) : \tau \in T_N\}$.

III - Inégalité du prophète par seuillage

Dans cette partie on suppose que les variables aléatoires $(X_n, 1 \leq n \leq N)$ sont positives, intégrables et indépendantes. On note m une médiane de X_N^*, c'est à dire un nombre réel défini par les inégalités

$$P(X_N^* < m) = q \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X_N^* > m) = p \leq \frac{1}{2}$$

Pour toute constante $c \geq 0$, on note

$$\tau(c) = \inf\{n \leq N : X_n \geq c\} \wedge N, \quad \sigma(c) = \inf\{n \leq N : X_n > c\} \wedge N,$$

$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(c)} = \mathbb{E}\left(X_{\tau(c)} 1_{\{X_{\tau(c)} \geq c\}}\right), \quad \mathbb{E}^+ X_{\sigma(c)} = \mathbb{E}\left(X_{\sigma(c)} 1_{\{X_{\sigma(c)} > c\}}\right).$$

Soit T_N^s l'ensemble des temps d'arrêt de la forme $\tau(c)$ et $\sigma(c)$ pour les constantes $c \geq 0$. On note enfin $\beta = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - m)^+]$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_N^*) \leq m + \beta$.

2. Montrer que

$$\mathbb{E}^+(X_{\sigma(m)}) = mp + \Sigma_{i=1}^N \mathbb{E}\left[(X_i - m)^+ 1_{\{\sigma(m) > i-1\}}\right] \geq mp + \beta(1-p)$$

et que

$$\mathbb{E}^+(X_{\tau(m)}) \geq m(1-q) + \beta q.$$

3. En déduire que si $\beta \geq m$, $\mathbb{E}(X_N^*) \leq 2\,\mathbb{E}^+(X_{\sigma(m)}) \leq 2\,\mathbb{E}(X_{\sigma(m)})$ et que si $\beta \leq m$, $\mathbb{E}(X_N^*) \leq 2\,\mathbb{E}^+(X_{\tau(m)}) \leq 2\,\mathbb{E}(X_{\tau(m)})$

4. En déduire les inégalités du prophète :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_N^*) &\leq 2 \sup\{\mathbb{E}(X_\tau) : \tau \in T_N^s\} & (1)\\ &\leq 2 \sup\{\mathbb{E}(X_\tau) : \tau \in T_N\}. & (2) \end{aligned}$$

5. Montrer que dans l'inégalité (2) la constante 2 est optimale. (On pourra considérer $X_1 = 1, X_2 = M\, 1_{A_M}$ avec $P(A_M) = \frac{1}{M}$ et $X_k = 0$ pour tout $k \geq 3$.) On admettra que cette constante 2 cesse d'être optimale si on demande en outre que les variables aléatoires $(X_n, 1 \leq n \leq N)$ soient de même loi.

6. Dans cette question, on suppose que pour chaque entier $N \geq 2$, les variables aléatoires $X_n^{(N)}, 1 \leq n \leq N$ sont indépendantes de même loi : étant donnés des réels $a \in]0,1[$, $b > 0$ $c > 0$ tels que $b + c < N$, on suppose que

$$P(X_1^{(N)} = 0) = 1 - \frac{b+c}{N},\ P(X_1^{(N)} = a) = \frac{c}{N} \text{ et } \quad P(X_1^{(N)} = 1) = \frac{b}{N}.$$

   (a) Montrer que

$$E = \lim_N \mathbb{E}\left(\sup_{1 \leq i \leq N} X_i^{(N)}\right) = 1 - e^{-b} + a\left(e^{-b} - e^{-(b+c)}\right).$$

   (b) Montrer que

$$\begin{aligned} W(a) &= \lim_N \mathbb{E}\left(X_{\tau(a)}^{(N)}\right) = \frac{(1 - e^{-(b+c)})(b + ac)}{b + c},\\ W(1) &= \lim_N \mathbb{E}\left(X_{\tau(1)}^{(N)}\right) = 1 - e^{-b}. \end{aligned}$$

(c) Montrer que si $a = a^* = \dfrac{c(1-e^{-b}) - be^{-b}(1-e^{-c})}{c(1-e^{-(b+c)})}$, on a $W(1) = W(a^*)$ et $0 < a^* < 1$.

(d) Montrer que si

$$Q(b,c) = 1 + \frac{e^{-b} - e^{-(b+c)}}{1 - e^{-(b+c)}} - \frac{b(e^{-b} - e^{-(b+c)})^2}{c(1 - e^{-(b+c)})(1 - e^{-b})}$$

on a

$$\lim_N \frac{\mathbb{E}(\sup\{X_n^{(N)} \,:\, 1 \leq n \leq N\})}{\sup\{E(X_\tau^{(N)}) : \tau \in T_N^s\}} = Q(b,c)\,.$$

En déduire que la constante 2 ne peut pas être améliorée dans l'inégalité (1) même lorsqu'on impose en outre aux variables aléatoires d'avoir la même loi.

IV - Inégalité du prophète pour des moyennes

Soit $(Y_n, n \geq 1)$ une suite adaptée de variables aléatoires positives intégrables telle que pour tout entier $n \geq 1$, Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ et on suppose que $V = \sup\{\mathbb{E}(X_\tau) : \tau \in \bar{T}\} < +\infty$. Pour tout $t > 1$, on pose

$$\nu_1(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) \geq tV\}$$

et pour tout entier $k \geq 1$,

$$\nu_{k+1}(\omega) = \inf\{n > \nu_k(\omega) : X_n(\omega) \geq tV + X_{\nu_k}(\omega)\}$$

1. Montrer que $P(\nu_1 < +\infty) \leq \frac{1}{t}$, puis que pour tout entier $m \geq 1$,

$$P(\nu_{m+1} < +\infty) \leq \sum_{k=m}^{\infty} P\left(\nu_m = k, \sup_{r>k} \frac{1}{r}\sum_{i=k+1}^{r} Y_i \geq tV\right).$$

   En déduire que $P(\nu_m < +\infty) \leq t^{-m}$ pour tout entier $m \geq 1$.

2. Pour tout $\omega \in \{\nu_1 \leq n\}$, soit

$$\sigma_n(\omega) = \sup\{j \geq 1 : \exists r \geq 1, \nu_r(\omega) = j \leq n\}$$

   et soit

$$A_n = \{\nu_1 \leq n\},\ B_n = \{\omega : \exists k \geq 2\ ,\ \nu_k(\omega) = n\} \text{ et } D_n = \{Y_n \leq ntV\}.$$

   (a) Montrer que $B_{n+1} \subset A_n$, $D_{n+1}^c \cap A_n^c \subset \{\nu_1 = n+1\}$ et $P(A_n) \leq t^{-1}$.

(b) Montrer que $X_n - X_{\sigma_n} \leq tV$.

(c) En utilisant la partition D_{n+1} et D^c_{n+1}, montrer que

$$I_n := \mathbb{E}\left(1_{B_{n+1}}(X_{n+1} - X_{\sigma_n})\right) \leq 2tVP(B_{n+1}) + \frac{1}{n+1}\mathbb{E}\left(1_{A_n \cap D^c_{n+1}} Y_{n+1}\right) .$$

(Ou pourra montrer que $I_n \leq tVP(B_{n+1}) + \mathbb{E}\left(1_{B_{n+1}}(X_{n+1} - X_n)\right)$.)

(d) En déduire que

$$\begin{aligned} I_n &\leq 2tVP(B_{n+1}) + t^{-1}(1-t^{-1})^{-1}\mathbb{E}\left(1_{D^c_{n+1}\cap A^c_n}\frac{Y_{n+1}}{n+1}\right) \\ &\leq 2tVP(B_{n+1}) + (t-1)^{-1}\mathbb{E}\left(1_{\{\nu_1 = n+1\}} X_{n+1}\right) . \end{aligned}$$

3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_{n+1}}(X_{n+1} - X_{\sigma_n}) = \sum_{k=2}^{\infty}(X_{\nu_k} - X_{\nu_{k-1}})1_{\{\nu_k < \infty\}}$$

et

$$X^* \leq X_{\nu_1}1_{\{\nu_1 < +\infty\}} + \sum_{k=2}^{\infty}(X_{\nu_k} - X_{\nu_{k-1}})1_{\{\nu_k < \infty\}} + tV$$

4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_{n+1}) = \sum_{k=2}^{\infty} P(\nu_k < \infty) \leq t^{-1}(t-1)^{-1}$$

5. Montrer que $E(X^*) \leq [1 + t + \frac{3}{t-1}]V$.

6. En déduire que $E(X^*) \leq 2(\sqrt{3}+1)\,V$.

V - Inégalité de type prophète pour des transformées de suites

Dans cette partie, on suppose que $(X_n\,, 1 \leq n \leq N)$ est une famille de variables aléatoires positives intégrables et que X_0 est une variable aléatoire intégrable telle que $\mathbb{E}(X_0) = 0$. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N &= \{U_{i+1} : 0 \leq i < N, 0 \leq U_i \leq 1\}, \\ \mathcal{J}_N &= \{U_{i+1} \text{ est mesurable par rapport à } \sigma(X_i), 0 \leq i < N, 0 \leq U_i \leq 1\} \\ \Pi_N &= \{U_{i+1} \text{ est mesurable par rapport à } \sigma(X_1, \cdots, X_i),\ 0 \leq i < N,\ 0 \leq U_i \leq 1\} \end{aligned}$$

et pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq N$, $Z_n = \sum_{0 \leq i < n} U_{i+1}(X_{i+1} - X_i)$; on note $Z = U * X$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on note

$$e_i = \mathbb{E}(X_i), \quad a_i = \mathbb{E}[(X_i - e_i)^+], \quad b_i = \mathbb{E}[(X_i - e_{i+1})^+]$$

et on suppose que $\mathbb{E}(X_i | X_{i-1}) = e_i$. Pour toute variable aléatoire X, on pose

$$\mu(X) = \mathbb{E}(X) - \frac{1}{2}\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)\,.$$

Dans la suite, on note

$$G = \sup\{\mathbb{E}(U * X)_N, U \in \mathcal{J}_N\}$$

l'espérance maximale obtenue à l'instant N en transformant (X_n) par une suite (U_n) adaptée au présent et

$$\mathbb{P} = \sup\{\mathbb{E}(U * X)_N, U \in \mathcal{P}_N\}$$

l'espérance maximale obtenue à l'instant N en transformant (X_n) par une suite (U_n) sans restriction d'adaptation.

1. Montrer que $\mu(X_0) \leq 0 \leq \mu(X_N)$.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire X, $\mu(X) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^+]$.
3. Montrer que si $\tau \in T_N$, $X_\tau - X_0 = Z_N$ pour $U_i = 1_{\{\tau \geq i\}} \in \Pi_N$.
4. Montrer que $G = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(e_i - X_{i-1})^+]$.
5. Montrer que $\mathbb{P} = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^+] \leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - e_i)^+] + G$.
6. Montrer que $G = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[(X_i - e_{i+1})^+] + e_N$.
7. Montrer que pour tout couple de nombre réels $a < b$,

$$(b - a)P(X \geq b) \leq \mathbb{E}[(X - a)^+] - \mathbb{E}[(X - b)^+] \leq (b - a)P(X > a)\,.$$

8. Soit X une variable aléatoire d'espérance e ; montrer que pour toute constante f,

$$E[(X - e)^+] \leq E[(X - f)^+]\,[1 + P(X < e)] + f - e$$

et que si $e \leq f$,

$$E[(X - e)^+] \leq E[(X - f)^+] + f - e\,.$$

9. En déduire que $\sum_{i=1}^N a_i \leq 2G - [\mu(X_N) - \mu(X_0)]\,.$
10. En déduire que

$$\mathbb{P} \leq 3G. \tag{3}$$

Tournez la page S.V.P.

11. On suppose de plus que $0 \leq e_1 \leq \cdots \leq e_N$. Montrer qu'alors $\mathbb{P} \leq 2G + e_N$.

12. On suppose dans cette question que $M = 2N$; on pose $X'_0 = X_0$, et pour $i \geq 1$, $X'_{2i-1} = e_i$, $e'_{2i-1} = e_i$, $X'_{2i} = X_i$, $e'_{2i} = e_i$. On note

$$G' = \sup\{\mathbb{E}(U * X')_{2N}, U \in \mathcal{J}_{2N}\} \text{ et } \mathbb{P}' = \sup\{\mathbb{E}(U * X')_{2N}, U \in \mathcal{P}_{2N}\}.$$

   (a) Montrer que $G' = G$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}' = G + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[(X_i - e_i)^+]$.

   (c) On suppose que $X_0 = X_N = 0$, $X_1 = \eta$ et pour tout $1 \leq i \leq N-2$, $e_{i+1} = \frac{e_i}{\rho}$ où $\eta > 0$ et $0 < \rho < 1$ sont des constantes. Pour $2 \leq i \leq N-2$, soit $P(X_i = e_{i+1}) = \rho$, $P(X_i = 0) = 1 - \rho$.

      i. Montrer que pour $2 \leq i \leq N-2$, $b_i = 0$ et $a_i = \rho(e_{i+1} - e_i)$.

      ii. Montrer que si η est assez petit et ρ est assez proche de 1, $\sum_{i=1}^{N-2} a_i$ peut être rendu arbitrairement proche de e_{N-1}, puis que pour N assez grand, $e_{N-1} \geq 1$.

      iii. Pour $\alpha \in]0, 1[$, on définit enfin $P(X_{N-1} = \frac{e_{N-1}}{\alpha}) = \alpha$ et $P(X_{N-1} = 0) = 1 - \alpha$. Montrer que $\sum_{i=1}^{N} a_i$ peut être choisi arbitrairement proche de $2e_{N-1}$ tandis que $\sum_{i=0}^{N-1} b_i = e_{N-1} = G$. En déduire que la constante 3 dans l'inégalité (3) est optimale.