C33121 J. 4812

SESSION 2003

3è ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 HEURES

L'usage de toute calculatrice est interdit

Aucun document personnel n'est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est de démontrer deux théorèmes de point fixe, et d'en donner des applications en topologie et dans la théorie des équations différentielles.

Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Notations. Dans tout le problème, on utilise les notations suivantes:
- si $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, on notera

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N$$

le produit scalaire euclidien canonique entre x et y, et

$$\|x\| := (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$$

la norme euclidienne associée;
- on notera

$$\overline{B_N} := \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq 1\}$$

la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$ centrée en 0,

$$B_N := \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| < 1\}$$

la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$ centrée en 0, et

$$S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = 1\}$$

la sphère unité de $\mathbb{R}^N$ centrée en 0; de manière générale, si F est une partie d'une espace vectoriel normé E, on notera $\overline{F}$ son adhérence;
- si U est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $\psi : U \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de classe C^1 sur U, on notera $D\psi(a)$ la différentielle de ψ en $a \in U$; c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$;
- si $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire, on notera $|||\cdot|||$ sa norme:

$$|||L||| := \sup\{\frac{\|Lx\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\}$$

(et on rappelle qu'on a aussi

$$|||L||| = \sup\{\|Lx\|, x \in \overline{B_N}\} = \sup\{\|Lx\|, x \in B_N\} = \sup\{\|Lx\|, x \in S^{N-1}\});$$

- on rappelle que par définition un "espace de Banach" est un espace vectoriel normé complet.

On démontrera tout d'abord le théorème du point fixe suivant:

Théorème 1. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, C une partie convexe compacte non vide de $\mathbb{R}^N$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe: il existe $x \in C$ tel que $f(x) = x$.*

On étudiera ensuite sa généralisation aux espaces de dimension infinie:

Théorème 2. *Soit C une partie convexe fermée non vide dans un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue telle que $\overline{f(C)}$ soit une partie compacte de E. Alors f admet au moins un point fixe: il existe $x \in C$ tel que $f(x) = x$.*

Les parties I, II et III concernent la preuve du théorème 1. On le prouve d'abord lorsque C est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (partie II), puis dans le cas général d'un convexe compact (partie III).
La partie II est indépendante de la partie I, dans le sens où pour traiter la partie II, on n'a besoin que des propriétés de la fonction ψ construite au I.3.e), et ces propriétés sont rappelées au début de la partie II. On rappelle ci-dessous deux résultats très classiques (le théorème de Weierstrass et celui d'inversion globale) dont on se servira au cours des parties I et II. Pour traiter la partie III, on n'a

besoin que de connaître le théorème 1 dans le cas particulier de la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (démontré en partie II).

La partie IV concerne des applications du théorème 1. Pour être traitée, on n'a besoin que du théorème 1.

Dans la partie V, on démontre le théorème 2. La preuve est basée sur le théorème 1.

Enfin dans la partie VI, on donne une application du théorème 2. Pour être traitée, cette dernière partie ne requiert que le théorème 2.

Rappels. Enfin on rappelle les deux théorèmes suivants, utiles dans les parties I et II:

Théorème 3. (**Weierstrass**) *Soient K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^N$, et $\phi : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers ϕ sur K, c'est-à-dire:*

$$\sup\{\|\phi(x) - P_n(x)\|, x \in K\} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Théorème 4. (**"Inversion globale"**) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $\psi : U \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 sur U. On suppose que*

(i) ψ est injective ,

(ii) en tout point $a \in U$, la différentielle de ψ en a: $D\psi(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est inversible.

Alors $\psi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $\psi(U)$.

1. Préliminaires pour la preuve du théorème 1

1.1. Cas $N = 1$.

Prouver le théorème lorsque $N = 1$.

Dans le reste de cette partie, on suppose que $N \geq 2$ et que l'on dispose d'une application continue $f : \overline{B_N} \to \overline{B_N}$ qui n'a pas de point fixe: notre hypothèse est que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \overline{B_N}$.

1.2. Construction préliminaire pour $N \geq 2$.

Le but des questions a) à c) est de construire une application continue $r : \overline{B_N} \to \overline{B_N}$ telle que

(*) pour tout $x \in \overline{B_N}$, $\|r(x)\| = 1$,

(**) pour tout $x \in S^{N-1}$, $r(x) = x$.

a) On se place dans le cas $N = 2$. Pour tout $x \in \overline{B_2}$, on considère le point $r(x) \in S^1$ qui appartient aussi à la droite passant par x et $f(x)$ et qui est tel que x appartient au segment $[f(x), r(x)]$. Faire un dessin.

b) Soit $N \geq 2$. Soit $x \in \overline{B_N}$ fixé. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le point $y(\lambda)$ de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$y(\lambda) := f(x) + \lambda(x - f(x)),$$

et la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$p(\lambda) := \|y(\lambda)\|^2 - 1.$$

Montrer que la fonction p s'annule pour exactement deux valeurs de λ, notées $\lambda_0(x)$ et $\lambda_1(x)$, telles que

$$\lambda_0(x) \leq 0 < 1 \leq \lambda_1(x).$$

Donner l'expression de $\lambda_0(x)$ et $\lambda_1(x)$. Placer les points $y(\lambda_0(x))$ et $y(\lambda_1(x))$ sur le dessin fait pour $N = 2$.

c) On considère l'application: $r : x \in \overline{B_N} \mapsto r(x) := y(\lambda_1(x))$. Montrer que cette application est continue sur $\overline{B_N}$ et vérifie les propriétés (*) et (**).

1.3. Construction d'une fonction plus régulière ayant des propriétés similaires.

Dans cette question, on va construire une fonction ψ définie sur un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de la boule unité fermée, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$, et qui vérifie aussi les propriétés $(*)$ et $(**)$.

On considère l'application $\phi : x \in \overline{B_N} \mapsto r(x) - x$.

d) Montrer qu'il existe $\rho \in]3/4, 1[$ tel que

$$\text{si } \|x\| \in [\rho, 1], \quad \text{alors } \|\phi(x)\| \leq \frac{1}{4}.$$

e) A l'aide du théorème 3 de Weierstrass, montrer qu'il existe des fonctions polynomiales $P_1, \cdots P_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \overline{B_N}, \ \|P(x) - \phi(x)\| \leq \frac{1}{4},$$

où on a noté $P(x) := (P_1(x), \cdots, P_n(x))$.

f) Soient $p \in \mathbb{N}$, et $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$Q(y) := 1 - y^p.$$

Montrer qu'on peut choisir $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} \forall y \in [0, \rho^2], \ \frac{3}{4} \leq Q(y) \leq 1, \\ \forall y \in [\rho^2, 1], \ 0 \leq Q(y) \leq 1, \\ Q(1) = 0. \end{cases}$$

g) On considère alors l'application $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$g(x) := x + Q(\|x\|^2)P(x).$$

Montrer que g est une application polynomiale. Montrer que si $\|x\| = 1$, alors $g(x) = x$.

h) On suppose que $\rho \leq \|x\| \leq 1$. Montrer que

$$\|g(x)\| \geq \frac{1}{4}.$$

i) On suppose maintenant que $\|x\| \leq \rho$. Vérifier d'abord que

$$g(x) = r(x) + Q(\|x\|^2)(P(x) - \phi(x)) + (Q(\|x\|^2) - 1)\phi(x).$$

En déduire à nouveau que

$$\|g(x)\| \geq \frac{1}{4}.$$

j) En déduire qu'il existe une fonction ψ définie sur un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de la boule $\overline{B_N}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$, et telle que pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\|\psi(x)\| = 1$, et pour tout $x \in S^{N-1}$, $\psi(x) = x$.

2. Preuve du théorème 1 dans le cas de la boule

Dans toute cette partie, on suppose toujours que l'on dispose d'une application continue $f : \overline{B_N} \to \overline{B_N}$ qui n'a pas de point fixe. Grâce aux constructions de la partie I, on sait qu'il existe une application ψ définie sur un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de la boule unité fermée, à valeurs dans la sphère S^{N-1}, de classe $\mathcal{C}^1$, et telle que $\psi(x) = x$ si $x \in S^{N-1}$. On considère alors une fonction ψ ayant ces propriétés (et on ne se préoccupe plus de la manière dont la fonction ψ a été construite dans la partie I).

2.1. Construction d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de la boule unité ouverte sur elle-même.

On considère $\psi_t(x) := (1-t)x + t\psi(x)$ pour $t \in [0,1]$.

2.1.1. *La fonction ψ_t est un difféomorphisme de B_N sur son image si t est positif et assez petit.*

Le but des questions k) à o) est de montrer que ψ_t est un difféomorphisme de B_N sur son image si t est positif et assez petit.

k) Montrer que $\psi_t(\overline{B_N}) \subset \overline{B_N}$ si $t \in [0,1]$, et que $\psi_t(B_N) \subset B_N$ si $t \in [0,1[$.

l) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall z \in \overline{B_N}, \quad |||D\psi(z)||| \leq M.$$

m) Montrer qu'il existe $t_1 \in]0,1]$ tel que $\psi_t : B_N \to B_N$ est injective si $t \in [0, t_1]$.

n) Montrer qu'il existe $t_2 \in]0, t_1]$ tel que, si $t \in [0, t_2]$ et pour tout point $x \in \overline{B_N}$, la différentielle de ψ_t en x est inversible, et son déterminant est strictement positif.

o) À l'aide du théorème 4 d'inversion globale, en déduire que si $t \in [0, t_2]$, $\psi_t(B_N)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (inclus dans B_N) et que ψ_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de B_N sur son image.

2.1.2. *L'image de la boule unité ouverte par ψ_t est la boule unité ouverte.*

Dans les questions p) à u), on suppose que l'on dispose de $t_2 > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, t_2]$, $\psi_t(B_N)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (inclus dans B_N) et que ψ_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de B_N sur son image. Le but des questions p) à u) est de montrer que $\psi_t(B_N) = B_N$ si $t \in [0, t_2]$.

p) Montrer que $\overline{B_N} \setminus \psi_t(B_N) \neq \emptyset$.

q) Soient $e \in \overline{B_N} \setminus \psi_t(B_N)$ et $z \in \psi_t(B_N)$. On considère

$$\theta_\infty := \sup\{\theta \in [0,1], b_\theta := (1-\theta)z + \theta e \in \psi_t(B_N)\}.$$

Montrer que $\theta_\infty > 0$.

r) Montrer qu'il existe une suite $(\theta_p)_p$ telle que $b_{\theta_p} \in \psi_t(B_N)$ et $\theta_p \to \theta_\infty$ quand $p \to \infty$.

s) En considérant la suite $(b_{\theta_p})_p$, montrer qu'il existe $y_\infty \in \overline{B_N}$ tel que $b_{\theta_\infty} = \psi_t(y_\infty)$.

t) En déduire que $y_\infty \in S^{N-1}$, puis que $e \in S^{N-1}$.

u) En déduire que, si $t \in [0, t_2]$, alors ψ_t est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de B_N sur elle-même.

2.2. Fin de la preuve du théorème.

On suppose maintenant qu'il existe $t_2 > 0$ tel que, si $t \in [0, t_2]$, alors ψ_t est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de B_N sur elle-même. On va montrer dans les questions v) à x) que c'est absurde.

Tournez la page S.V.P.

v) On considère

$$I(t) := \int_{B_N} \det D\psi_t(x)\, dx.$$

montrer que I est un polynôme en t.

w) Montrer par changement de variable que $I(t)$ est égal au volume de la boule B_N pour $t \in [0, t_2]$. En déduire que $I(1) > 0$.

x) Pour $t = 1$, on a $\psi_1 = \psi$. Vérifier que pour tout $x \in B_N$, $\psi(x) \cdot \psi(x) = 1$. En déduire que pour tout $x \in \overline{B_N}$, le déterminant de la matrice $D\psi(x)$ est nul. (On pourra montrer que les N vecteurs colonnes de la matrice $D\psi(x)$ sont liés.) Conclure.

3. Preuve du théorème 1 dans le cas général

Dans cette partie, on suppose que C est une partie convexe compacte non vide de $\mathbb{R}^N$, et qu'on a une fonction $f : C \to C$ continue.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que la boule fermée centrée en O et de rayon R (qu'on notera $\overline{B_N}(0, R)$) contienne C.

b) Montrer qu'il existe une application $\pi : \overline{B_N}(0, R) \to C$ continue telle que pour tout $x \in C$, $\pi(x) = x$.

c) En considérant l'application g définie sur $\overline{B_N}(0, R)$ par $g(x) = f(\pi(x))$, montrer que f admet un point fixe dans C.

4. Une application du théorème 1 en topologie et intégration

1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $c < d$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le rectangle $E(a, b, c, d) := [a, b] \times [c, d]$. On suppose qu'on a deux applications continues $h, v : [-1, 1] \to E(a, b, c, d)$ (appelées 'chemins') telles que

- le point $h(-1)$ est sur le côté gauche du rectangle (c'est-à dire l'abscisse de $h(-1)$ vaut a),
- le point $h(1)$ est sur le côté droit du rectangle (c'est-à dire l'abscisse de $h(1)$ vaut b),
- le point $v(-1)$ est en bas du rectangle (c'est-à dire l'ordonnée de $v(-1)$ vaut c),
- le point $v(1)$ est en haut du rectangle (c'est-à dire l'ordonnée de $v(1)$ vaut d).

Le but de cette question est de montrer que les chemins h et v se coupent, c'est-à-dire qu'il existe $t, s \in [0, 1]$ tels que $h(t) = v(s)$.

a) Faire un dessin. Graphiquement, semble-t-il possible que les chemins h et v ne se coupent pas ?

b) On suppose que les chemins h et v ne se coupent pas, c'est-à-dire

$$\forall t, s \in [-1, 1],\ h(t) \neq v(s).$$

On note $h = (h_1, h_2)$, $v = (v_1, v_2)$,

$$N(t, s) := \sup\{|h_1(t) - v_1(s)|, |h_2(t) - v_2(s)|\}$$

et

$$F(t, s) := \left(\frac{v_1(s) - h_1(t)}{N(t, s)}, \frac{h_2(t) - v_2(s)}{N(t, s)}\right).$$

Montrer que F est bien définie et continue sur $[-1, 1]^2$.

c) Montrer que $F([-1, 1]^2)$ est inclus dans le bord du carré $[-1, 1]^2$.

d) Montrer que F a un point fixe (t_0, s_0) sur le bord du carré $[-1,1]^2$. En déduire que ou $|t_0| = 1$, ou $|s_0| = 1$.

e) Enfin, en étudiant les quatre cas possibles, montrer que cette situation est impossible. Conclure.

2) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 1.$$

Montrer qu'il existe deux réels α et β, $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, tels que

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

3) Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 1 = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Le but de cette question est de montrer qu'il existe deux réels α et β, $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, tels que

$$(***) \qquad \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \frac{1}{2} = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

a) On prolonge f et g de façon 1-périodique sur $\mathbb{R}$, et on note

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^x g(t)\,dt.$$

On considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(x) := (F(x), G(x)).$$

Montrer que trouver $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ tels que $(***)$ soit satisfaite revient à trouver $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ tels que

$$\gamma(\alpha) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \gamma(\beta).$$

b) Montrer qu'il existe $a, b \in [0,1]$ tels que

$$A := F(a) - G(a) = \sup_{x\in[0,1]} (F(x) - G(x)), \quad \text{et} \quad B := F(b) - G(b) = \inf_{x\in[0,1]} (F(x) - G(x)).$$

c) Tracer sur un graphique les droites (Δ_A) et (Δ_B) d'équations respectives $(\Delta_A) : y = x - A$ et $(\Delta_B) : y = x - B$. Dans quelle région du plan se trouve le graphe de la courbe γ, c'est-à-dire l'ensemble $\{\gamma(x), x \in \mathbb{R}\}$? Et dans quelle région du plan se trouve l'ensemble $\{\gamma(x) + (1/2, 1/2), x \in \mathbb{R}\}$?

d) Soient M, N, P, Q les quatre points de $\mathbb{R}^2$ déterminés par:

$$M := \gamma(a), \quad N := \gamma(b), \quad P := M + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad \text{et} \quad Q := N - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Placer ces quatre points sur le graphique précédent.

e) Montrer que P et Q sont sur le morceau de courbe $\{\gamma(x) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x \in [b-1, a]\}$.

f) Déduire de la question 1) (de cette partie) qu'il existe $x_0 \in [b-1, a]$ et $y_0 \in [a, b]$ tels que

$$\gamma(x_0) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \gamma(y_0).$$

g) Montrer qu'alors ou $\alpha := x_0$ et $\beta := y_0$, ou $\alpha := y_0$ et $\beta := x_0 + 1$ vérifient la propriété $(***)$.

5. Passage a la dimension infinie

5.1. Contre-exemple au théorème 1 en dimension infinie.

Soit E l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$: E est l'ensemble des suites $u = (u_n)_n$, $u_n \in \mathbb{R}$, telles que la série $\sum |u_n|$ converge; on munit E de la norme:

$$\|u\| := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

a) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

b) Soit f l'application définie pour tout $u = (u_n)_n \in E$ par:

$$f(u) := (1 - \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|, u_0, u_1, u_2, \cdots).$$

Montrer que f est bien définie, continue de E sur E, que f envoie la boule unité fermée de E sur elle-même, mais n'a pas de point fixe sur E.

5.2. Preuve du théorème 2.

Dans la suite, on démontre le théorème 2. Soit E un espace de Banach. On notera $\|\cdot\|$ la norme sur E. Soit C une partie convexe fermée non vide de E, et $f : C \to C$ une application continue telle que $\overline{f(C)}$ soit une partie compacte de E.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $w_1, \cdots, w_p$ appartenant à C tels que

$$\overline{f(C)} \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(w_k, \varepsilon),$$

où $B(w_k, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte de E de centre w_k et de rayon ε.

b) On note

$$C_\varepsilon := \{t_1 w_1 + \cdots + t_p w_p, t_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{p} t_j = 1\}.$$

Montrer que $C_\varepsilon \subset C$.

c) Pour tout $x \in C_\varepsilon$, on définit

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{p} \frac{\sup\{\varepsilon - \|f(x) - w_i\|, 0\}}{\sum_{j=1}^{p} \sup\{\varepsilon - \|f(x) - w_j\|, 0\}} w_i.$$

Montrer que f_ε est bien définie et continue sur C_ε, et que $f_\varepsilon(C_\varepsilon) \subset C_\varepsilon \subset E_\varepsilon$, où E_ε désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $w_1, \cdots, w_p$.

d) Montrer qu'il existe $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.

e) Montrer que pour tout $x \in C_\varepsilon$, $\|f_\varepsilon(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$. (On pourra examiner d'abord le cas où $f(x)$ appartient à une et une seule boule $B(w_j, \varepsilon)$.)

f) On considère maintenant $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, et $\varepsilon = 1/n$. En faisant tendre n vers l'infini, montrer qu'il existe $y \in C$ tel que $f(y) = y$.

6. Une application du théorème 2 aux équations différentielles

Le but de cette partie est de démontrer le

Théorème 5. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^N$. Alors il existe $T > 0$ et $u : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^1 sur $[0,T]$ telle que*

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \text{ pour tout } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{6. 1}$$

a) Comparer les hypothèses avec celles du théorème de Cauchy-Lipschitz.

b) Pour simplifier, on va prouver le théorème 5 dans le cas $u_0 = 0$. On note

$$M := \sup\{\|f(x)\|, x \in \overline{B_N}\},$$

et $T := 1/M$.

La valeur de T étant ainsi fixée, on considère l'ensemble E des applications continues v définies sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^N$:

$$E := C([0,T], \mathbb{R}^N)$$

muni de la norme

$$\|v\|_\infty := \sup_{t \in [0,T]} \|v(t)\|.$$

Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

c) On considère l'ensemble F des applications continues v définies sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\overline{B_N}$:

$$F := C([0,T], \overline{B_N}).$$

Montrer que F est une partie convexe et fermée de E.

d) Pour tout $v \in E$, on considère l'application w_v définie sur $[0,T]$ par:

$$\forall t \in [0,T],\ w_v(t) := \int_0^t f(v(\tau))\, d\tau.$$

Montrer que l'application w_v ainsi définie est continue sur $[0,T]$. Montrer que si v appartient à F, alors w_v est aussi un élément de F.

e) On considère l'application $\phi : F \to F$ définie par $\phi(v) := w_v$. Montrer que ϕ est continue de F dans F, c'est-à-dire que si $\varepsilon > 0$ et $\tilde{v} \in F$ sont fixés, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout v tel que

$$v \in F \text{ et } \|v - \tilde{v}\|_\infty < \eta,$$

on a

$$\|\phi(v) - \phi(\tilde{v})\|_\infty < \varepsilon.$$

f) On suppose que $v \in F$ est un point fixe pour ϕ. Montrer que v est alors une application de classe C^1 sur $[0,T]$, et qui est solution du problème (6. 1).

g) On va donc s'attacher à montrer que ϕ admet un point fixe dans F. On suppose pour l'instant que $\overline{\phi(F)}$ est une partie compacte de E. Montrer qu'alors ϕ admet un point fixe dans F.

h) Reste à démontrer que $\overline{\phi(F)}$ est une partie compacte de E. Pour cette dernière information, on rappelle cette conséquence du théorème d'Ascoli: $\overline{\phi(F)}$ est une partie compacte de E si et seulement si $\phi(F)$ est une partie *uniformément équicontinue*, c'est-à-dire: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $v \in F$, pour tous $t, t' \in [0,1]$ tels que $|t - t'| < \eta$, alors $\|\phi(v)(t) - \phi(v)(t')\| < \varepsilon$ (la valeur de η est donc indépendante du choix de v dans F).

Montrer que $\phi(F)$ est une partie uniformément équicontinue. Conclure.