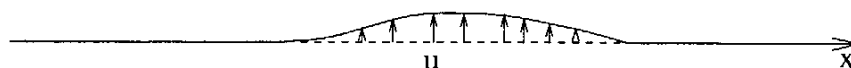


B. ANALYSE NUMÉRIQUE

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Analyse et approximation de l'équation des ondes en dimension 1

Nous nous intéressons dans ce problème au déplacement transversal $u(x, t)$ d'une corde supposée infinie: $x \in \mathbb{R}$ désigne l'abscisse le long de la corde, $t \geq 0$ le temps, $\rho(x)$ la masse linéique de la corde et $\mu(x)$ sa tension.



Les variations de u sont régies par l'équation des ondes unidimensionnelle:

$$(1) \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

La première partie étudie l'équation (1) dans le cas d'un milieu homogène (i.e. à coefficients constants): calcul de la solution exacte et analyse de Fourier de l'équation. La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un schéma aux différences finies pour l'approximation de (1)

en milieu homogène: l'accent est mis sur l'analyse de Fourier discrète du schéma, qui "suit" l'analyse de Fourier du problème continu. Dans la partie III, nous introduisons la méthode de l'énergie qui permet d'analyser l'équation (1) en milieu hétérogène (i.e. à coefficients variables). C'est l'équivalent discret de cette technique qui est utilisé dans la partie IV pour étudier la convergence et la stabilité d'un schéma numérique, version "hétérogène" du schéma étudié dans la partie II.

Partie I: Propagation des ondes en milieu homogène

Nous considérons ici le cas où les fonctions $\rho(x) = \rho$ et $\mu(x) = \mu$ où ρ et μ sont deux constantes strictement positives. Nous introduisons la vitesse de propagation:

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

auquel cas l'équation (1) devient:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Nous nous intéressons dans cette partie à la solution classique du problème de Cauchy qui consiste à étudier l'évolution de la corde lorsque sa déformation initiale $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et sa vitesse initiale $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sont données (dans ce qui suit $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Chercher } u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \text{ telle que} & \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Question 1: Formule de d'Alembert.

Démontrer que le problème (3) admet une solution unique u donnée par la formule de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi$$

Indication: on pourra utiliser le changement de variable $\xi = x + ct$ et $\eta = x - ct$ pour montrer que $u(x, t)$ solution de (2) est nécessairement de la forme

$$(4) \quad u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Question 2: Propagation à vitesse finie.

Nous supposons dans cette question que les supports des fonctions u_0 et u_1 sont inclus dans un intervalle fini $[a, b]$.

a- Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, le support de $u(\cdot, t)$ est inclus dans l'intervalle $[a-ct, b+ct]$

- b- Montrer que pour $t > (b - a)/2c$, la fonction $u(.,t)$ est constante sur l'intervalle $[b-ct, a+ct]$. Préciser la valeur de cette constante.

Indication: un raisonnement s'appuyant sur un graphique est conseillé.

Question 3 : Ondes planes harmoniques.

Nous appelons onde plane harmonique de pulsation $\omega > 0$, de nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$ et d'amplitude $A \in \mathbb{C}$, une solution particulière de (2) de la forme (il s'agit ici d'une solution u à valeurs complexes mais, l'équation des ondes étant à coefficients réels, on construit des solutions réelles en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire de u):

$$(5) \quad u(x, t) = A \exp i(\omega t - kx).$$

Une telle onde est, en particulier, périodique en espace et la période $\lambda = 2\pi/|k|$ s'appelle la longueur d'onde.

- a- Justifier pourquoi la quantité $V = \frac{\omega}{k}$ s'appelle la vitesse de phase.
 b- Trouver la relation de dispersion qui doit relier ω et k pour que u , défini par (5), soit solution de (2). En déduire les valeurs possibles de V .

Question 4 : Analyse de Fourier et Stabilité L^2 .

Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$ on note $\hat{u} = \mathcal{F}u$ la transformée de Fourier de u définie par

$$(6) \quad \mathcal{F}u(k) = \hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) \exp(-ikx) dx.$$

On rappelle en particulier que cette transformation se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même (théorème de Plancherel-Parseval) et qu'on a la formule d'inversion, pour peu que $\hat{u}(k)$ appartienne également à $L^1(\mathbb{R})$:

$$(7) \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k) \exp(ikx) dk.$$

Dans ce qui suit, on supposera que les données initiales u_0 et u_1 du problème de Cauchy (3) sont de classe C^2 et à support compact et $\hat{u}(k, t)$ désignera la transformée de Fourier suivant la variable x de la solution $u(x, t)$ de ce problème.

- a- Ecrire l'équation différentielle vérifiée, pour chaque k par la fonction $t \mapsto \hat{u}(k, t)$.
 b- En déduire la formule:

$$(8) \quad \hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) \cos(ckt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck}.$$

- c- Montrer formellement (c'est à dire sans donner de justification sur les diverses manipulations d'intégrales) à partir de la formule d'inversion (7) que la solution $u(x, t)$ s'écrit sous la forme:

$$(9) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a^+(k) \exp ik(x - ct) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a^-(k) \exp ik(x + ct) dk$$

où on exprimera les amplitudes $a^+(k)$ et $a^-(k)$ en fonction des données initiales. Autrement dit, la solution se représente comme une “superposition infinie” d’ondes planes (5). Un tel résultat montre que les ondes planes constituent en quelque sorte un système fondamental de solutions.

- d- Expliquer succinctement comment on peut retrouver la formule de d’Alembert à partir des propriétés de la transformation de Fourier.
- e- A l’aide du théorème de Plancherel, établir l’estimation a priori (il s’agit d’un résultat de stabilité en norme L^2):

$$(10) \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + t \|u_1\|_{L^2}.$$

- f- Retrouver l’estimation (10) directement à partir de la formule de d’Alembert.

Partie II: Le schéma saute-mouton explicite en milieu homogène

On s’intéresse à l’approximation par différences finies du problème de Cauchy (3). Pour cela on considère une grille régulière de discrétisation du demi-espace $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ de pas respectifs $\delta x > 0$ et $\delta t > 0$. On pose :

$$x_j = j\delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad t^n = n\delta t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dans ce qui suit u_j^n représentera une approximation de la solution exacte u au point x_j à l’instant t^n . On approche l’équation des ondes par le schéma saute-mouton:

$$(11) \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\delta x^2} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 1.$$

On introduit le nombre adimensionnel (souvent appelé coefficient CFL):

$$(12) \quad \alpha = c \frac{\delta t}{\delta x}.$$

Dans la suite, lorsque l’on s’intéressera à la stabilité ou à la convergence du schéma en faisant varier δt et δx , **on considèrera que le rapport α reste constant**. Par ailleurs, si p est un entier positif, on notera δt^p et δx^p pour $(\delta t)^p$ et $(\delta x)^p$.

Question 1: Montrer que le schéma (11) permet de calculer explicitement la solution dès que l’on connaît les suites u_j^0 et u_j^1 pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Question 2: Soit $u(x, t)$ une solution régulière (au moins de classe C^5 en espace et en temps) de l’équation des ondes (2). On pose $\bar{u}_j^n = u(j\delta x, n\delta t)$ et on introduit l’erreur de troncature ε_j^n

$$\varepsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\delta t^2} - c^2 \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{\delta x^2}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 1.$$

- a - Démontrer que, lorsque $\alpha = 1$, $\varepsilon_j^n = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 1$, autrement dit le schéma est “exact”. (On pourra utiliser par exemple la forme générale de la solution de l’équation des ondes)

Remarque: ce résultat est relativement anecdotique car spécifique à la dimension 1.

b - Dans le cas général, démontrer l'existence d'une constante $C(\alpha)$, qu'on explicitera, telle que:

$$\varepsilon_j^n = C(\alpha) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) c^2 \delta x^2 + o(\delta x^2), \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{lorsque } \delta x \rightarrow 0).$$

On dit qu'on a affaire à un schéma d'ordre 2.

Question 3: Schéma de démarrage.

Pour compléter le schéma, on utilise le schéma de démarrage suivant:

$$(13) \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} u_j^0 = u_{0,j}, \\ u_j^1 = u_j^0 + \delta t \left(u_{1,j} + \frac{c^2 \delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{\delta x^2} \right), \end{cases}$$

où on a posé $u_{0,j} = u_0(x_j)$ et $u_{1,j} = u_1(x_j)$. Justifier le choix d'un tel schéma.

Question 4: Vitesse de propagation numérique et condition CFL.

On suppose que les fonctions u_0 et u_1 sont à support compact inclus dans $[a, b]$. Démontrer que la solution u_j^n du schéma possède la propriété de propagation à vitesse finie suivante:

$$(14) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 1, \quad \left(x_j \notin \left[a - \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right) t^n, b + \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right) t^n \right] \implies u_j^n = 0 \right).$$

La notion de convergence minimale pour un schéma numérique est la notion de convergence faible. Elle fait appel à la fonction "constante par morceaux" $u_{h,\Delta t}(x, t)$ définie par:

$$u_{h,\Delta t}(x, t) = u_j^n \quad \text{si } (x, t) \in]x_j - \delta x/2, x_j + \delta x/2[\times]t^n - \delta t/2, t^n + \delta t/2[.$$

On dira alors que le schéma converge faiblement si, pour toutes données initiales, la fonction $u_{h,\Delta t}(x, t)$ converge vers la solution exacte $u(x, t)$ au sens des distributions. Dédurre de ce qui précède que le schéma numérique ne peut converger (même au sens faible) que si la condition dite de Courant-Friedrichs-Levy:

$$(15) \quad \alpha = c \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1,$$

est satisfaite (on pourra se contenter d'exhiber des exemples de données initiales pour lesquelles la convergence n'a pas lieu lorsque (15) est violée).

Question 5: Ondes planes numériques.

On suppose dans cette question que la condition (15) est satisfaite. Par analogie aux ondes planes harmoniques, on s'intéresse aux solutions particulières de (11) qui sont de la forme:

$$(16) \quad u_j^n = A \exp i(\omega t^n - k x_j),$$

où k et ω sont des réels auxquels on peut imposer que:

$$|\omega \delta t| \leq \pi, \quad |k \delta x| \leq \pi.$$

En particulier, les longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/|k|$ vérifient:

$$\lambda \geq 2 \delta x.$$

Dans la suite on introduira le nombre adimensionnel (qui relie la finesse du maillage à la longueur d'onde λ)

$$\kappa = \frac{|k| \delta x}{2\pi} = \frac{\delta x}{\lambda} \in \left] 0, \frac{1}{2} \right].$$

- a - Montrer que la relation de dispersion du schéma, c'est à dire la relation entre k et ω pour que (16) soit solution de (11), s'écrit:

$$(17) \quad \frac{4}{\delta t^2} \sin^2 \frac{\omega \delta t}{2} = c^2 \frac{4}{\delta x^2} \sin^2 \frac{k \delta x}{2}.$$

- b - Si h désigne le couple $(\delta x, \delta t)$, on désigne par $\omega_h(k)$ l'unique solution de l'équation (17) située dans l'intervalle $[0, \pi/\delta x]$ (où ω est l'inconnue et k est considéré comme un paramètre) et on introduit la vitesse de phase numérique:

$$c_h(k) = \frac{\omega_h(k)}{k}.$$

Montrer que l'on peut écrire:

$$c_h(k) = c \cdot q(\alpha, \kappa)$$

où $q(\alpha, \kappa)$ est une fonction que l'on précisera. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\kappa \mapsto q(\alpha, \kappa)$ au voisinage de $\kappa = 0$ et commenter le résultat obtenu.

- c - Montrer que $q(\alpha, \kappa) \leq 1$ (c'est à dire que la vitesse de propagation des ondes planes harmoniques est approchée par défaut) et que la fonction $\alpha \mapsto q(\alpha, \kappa)$ est croissante. Commenter ce résultat.

Question 6: Analyse de Fourier et stabilité L^2 .

Le point de vue que nous adoptons ici est celui de considérer le schéma comme une équation d'évolution discrète dans un espace de suites:

$$(18) \quad L_h^2 = \{u_h = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}, u_j \in \mathbb{C} / \sum_j |u_j|^2 < +\infty\}$$

muni de la structure d'espace de Hilbert avec la norme :

$$(19) \quad \|u_h\| = \sqrt{\sum_j |u_j|^2 \delta x}.$$

L'équation (11) peut alors se réécrire sous la forme, si $u_h^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$:

$$(20) \quad \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\delta t^2} + A_h u_h^n = 0,$$

où A_h est l'opérateur linéaire et continu dans L_h^2 défini par:

$$v_h = A_h u_h \iff \forall j \in \mathbb{Z}, \quad v_j = -c^2 \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\delta x^2},$$

et le schéma de démarrage (13) se réécrit (avec des notations évidentes):

$$(21) \quad \begin{cases} u_h^0 = u_{0,h}, \\ u_h^1 = u_h^0 + \delta t \quad u_{1,h} - \frac{\delta t^2}{2} A_h u_h^0. \end{cases}$$

Par définition, le schéma est dit L^2 -stable si et seulement si il existe une fonction positive $C(\cdot)$ telle que, pour tout $(u_{0,h}, u_{1,h})$ dans $L_h^2 \times L_h^2$:

$$(22) \quad \|u_h^n\| \leq C(t^n) \{ \|u_{0,h}\| + \|u_{1,h}\| \}.$$

Pour analyser la stabilité du schéma, nous allons utiliser la transformation de Fourier discrète. Nous rappelons pour cela que les fonctions:

$$\left\{ w_j : \left] -\frac{\pi}{\delta x}, \frac{\pi}{\delta x} \right[\rightarrow \mathbb{C} \middle/ w_j(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i k x_j), \quad j \in \mathbb{Z} \right\}$$

forment une famille orthogonale totale de l'espace $L^2 \left(\left] -\frac{\pi}{\delta x}, \frac{\pi}{\delta x} \right[\right)$ dont la norme sera notée $\|\cdot\|_{L^2}$. De plus

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \|w_j\|_{L^2} = (\delta x)^{-1/2}.$$

En conséquence, la transformation de Fourier discrète (en quelque sorte un équivalent discret de la transformation de Fourier continue (6)):

$$(23) \quad \mathcal{F}_h : L_h^2 \longrightarrow L^2 \left(\left] -\frac{\pi}{\delta x}, \frac{\pi}{\delta x} \right[\right)$$

définie par:

$$(24) \quad \forall u_h \in L_h^2, \quad \mathcal{F}_h u_h = \sum_j u_j w_j \delta x, \quad \left(\text{série convergente dans } L^2 \left(\left] -\frac{\pi}{\delta x}, \frac{\pi}{\delta x} \right[\right) \right)$$

est un isomorphisme de L_h^2 dans $L^2 \left(\left] -\frac{\pi}{\delta x}, \frac{\pi}{\delta x} \right[\right)$ dont l'inverse est défini par:

$$(25) \quad u_h = \mathcal{F}_h^{-1} \hat{u}_h \iff u_j = \int_{-\frac{\pi}{\delta x}}^{\frac{\pi}{\delta x}} \hat{u}_h(k) \overline{w_j(k)} dk.$$

De plus \mathcal{F}_h est une isométrie:

$$(26) \quad \hat{u}_h = \mathcal{F}_h u_h \implies \|\hat{u}_h\|_{L^2} = \|u_h\|.$$

a - Montrer que

$$(27) \quad \forall u_h \in L_h^2, \quad \mathcal{F}_h(A_h u_h)(k) = \frac{4c^2}{\delta x^2} \sin^2 \left(\frac{k \delta x}{2} \right) \hat{u}_h(k).$$

- b - Ecrire l'équation aux différences homogène (E_k) que doit satisfaire la suite $\hat{u}_h^n(k)$, où $\hat{u}_h^n = \mathcal{F}_h u_h^n$, pour que u_h^n vérifie (20).
- c - Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions des équations aux différences (E_k) soient toutes bornées sur $\{k \in]-\frac{\pi}{\delta x}, \frac{\pi}{\delta x}[/ k \neq 0\}$ n'est autre que la condition CFL (15).
- d - On suppose que (15) est satisfaite. Montrer que l'espace des solutions de (E_k) est engendré par les suites $\cos(\omega_h(k)t^n)$ et $\sin(\omega_h(k)t^n)$. En déduire que la solution de (20), (21) est donnée par:

$$(28) \quad \hat{u}_h^n(k) = \hat{u}_{0,h}(k) \cos(\omega_h(k) t^n) + \hat{u}_{1,h}(k) \frac{\sin(\omega_h(k) t^n)}{\sin(\omega_h(k) \delta t)} \delta t.$$

En déduire la stabilité L^2 du schéma ainsi que l'estimation de stabilité:

$$(29) \quad \|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| + t^n \|u_h^1\|.$$

- e - On suppose que (15) n'est pas satisfaite. Montrer que dans ce cas le schéma est L^2 -instable. Indication: on pourra exhiber un élément $\varphi_h \in L_h^2$, tel que si $u_{0,h} = \varphi_h$, $u_{1,h} = 0$ et $\delta t = t/n$, t étant fixé,

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\|u_h^n\|}{\|u_{0,h}\|} = +\infty.$$

Partie III: Propagation des ondes en milieu hétérogène

Cette fois les fonctions ρ et μ ne sont plus constantes mais sont continuellement dérivables. On s'intéresse au problème de Cauchy à coefficients variables:

$$(30) \quad \begin{cases} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \end{cases}$$

où on suppose que:

$$(31) \quad \begin{cases} \rho^- = \inf_{x \in \mathbb{R}} \rho(x) > 0, & \rho^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(x) < \infty, \\ \mu^- = \inf_{x \in \mathbb{R}} \mu(x) > 0, & \mu^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}} \mu(x) < \infty. \end{cases}$$

On définit la vitesse de propagation au point x par:

$$(32) \quad c(x) = \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}}.$$

On admettra ici que, sous les hypothèses:

$$(33) \quad (u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R})^2, \quad \mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \in H^1(\mathbb{R}),$$

le problème (30) admet une unique solution classique $u(x, t)$ telle que:

$$(34) \quad u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})), \quad \mu \frac{\partial u}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R})).$$

Dans la suite, on associe à cette solution la densité linéique d'énergie e :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \rho(x) \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \frac{1}{2} \mu(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2.$$

On définit l'énergie $E(\Omega, t)$ de la solution u contenue dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}$ à l'instant t par:

$$E(\Omega, t) = \int_{\Omega} e(x, t) dx.$$

Question 1 : Conservation de l'énergie.

Montrer que l'énergie totale

$$E(t) = E(\mathbb{R}, t),$$

est indépendante du temps. Expliquer pourquoi ce résultat peut être interprété comme un résultat de stabilité de l'équation des ondes.

Question 2 : Propagation à vitesse finie

On introduit une fonction $X^+(t)$ satisfaisant:

$$\frac{dX}{dt}(t) = c(X(t)), \quad t > 0,$$

et on pose $\Omega_t = [X(t), +\infty[$.

- a- Démontrer que $\frac{d}{dt} E(\Omega_t, t) \leq 0$.
- b- En déduire que si u_0 et u_1 sont nulles pour $x \geq b$, la solution $u(., t)$ est nulle dans l'intervalle $[X^+(t), +\infty[$ où $X^+(t)$ est une fonction que l'on caractérisera.
- c- Etablir que si les supports de u_0 et u_1 sont inclus dans un intervalle $[a, b]$ alors, pour tout t positif, le support de la solution $u(., t)$ à l'instant t est inclus dans un intervalle $[X^-(t), X^+(t)]$ où $X^-(t)$ et $X^+(t)$ sont deux fonctions que l'on caractérisera. Comparer ce résultat à celui de la question I) 2-a.

Partie IV: Le schéma saute-mouton en milieu hétérogène

On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy (30). On suppose dans ce qui suit que les fonctions ρ et μ sont régulières. On considère le schéma suivant, qui généralise (11) aux milieux hétérogènes:

$$(35) \quad \rho_j \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\delta t^2} - \frac{1}{\delta x} \left(\mu_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta x} - \mu_{j-\frac{1}{2}} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} \right) = 0,$$

où nous avons posé:

$$\rho_j = \frac{1}{2\delta x} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho(x) dx, \quad \mu_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mu(x) dx.$$

Le schéma (35) est complété par le schéma de démarrage ($u_{0,j} = u_0(x_j)$ et $u_{1,j} = u_1(x_j)$):

$$(36) \quad \begin{cases} u_j^0 = u_{0,j}, \\ u_j^1 = u_j^0 + \delta t u_{1,j} + \frac{\delta t^2}{2\rho_j} \frac{1}{\delta x} \left(\mu_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{\delta x} - \mu_{j-\frac{1}{2}} \frac{u_j^0 - u_{j-1}^0}{\delta x} \right) = 0. \end{cases}$$

Question 1: Réécrire le schéma ((35), (36)) sous la forme abstraite ((20), (21)) en précisant la définition de l'opérateur A_h .

Question 2: On munit L_h^2 du produit scalaire à poids

$$(u_h, v_h)_\rho = \sum_j \rho_j u_j v_j \delta x,$$

et on note $\|\cdot\|_\rho$ la norme associée. Démontrer la formule de Green discrète:

$$(37) \quad \forall (u_h, v_h) \in L_h^2 \times L_h^2, \quad (A_h u_h, v_h)_\rho = a_h(u_h, v_h),$$

où la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est définie par:

$$(38) \quad \forall (u_h, v_h) \in L_h^2 \times L_h^2, \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_j \mu_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1} - u_j}{\delta x} \cdot \frac{v_{j+1} - v_j}{\delta x} \delta x.$$

En déduire que l'opérateur A_h est symétrique défini positif.

Question 3: Soit $u_h^n \in L_h^2$ la solution du problème ((20), (21)). Démontrer le résultat de conservation d'énergie discrète:

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = E_h^{\frac{1}{2}},$$

où nous avons posé:

$$(39) \quad E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} \right\|_\rho^2 + \frac{1}{2} a_h(u_h^{n+1}, u_h^n).$$

Commenter ce résultat.

Question 4: On introduit la quantité:

$$\|A_h\| = \sup_{u_h \in L_h^2} \frac{a_h(u_h, u_h)}{\|u_h\|_\rho^2}$$

a - Montrer que:

$$(40) \quad \|A_h\| \leq \frac{4(c^+)^2}{\delta x^2}$$

b - Montrer que:

$$(41) \quad 2E_h^{n+\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{\delta t^2 \|A_h\|}{4}\right) \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} \right\|_\rho^2 + a_h(u_h^{n+\frac{1}{2}}, u_h^{n+\frac{1}{2}}),$$

où nous avons posé

$$u_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}.$$

c - En déduire que l'énergie $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ est une quantité positive sous la condition:

$$(42) \quad c^+ \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1,$$

de telle sorte que le résultat de conservation d'énergie discrète correspond alors bien à un résultat de stabilité.

Question 5: Convergence et estimation d'erreur.

Dans cette question, on suppose qu'on a l'inégalité stricte:

$$(43) \quad \sigma \equiv c^+ \frac{\delta t}{\delta x} < 1.$$

On suppose également que les données initiales u_0 et u_1 sont régulières et à support compact, de telle sorte maintenant que la solution de (30) est de classe C^4 en espace et en temps et vérifie:

$$(44) \quad \|u\|_{C^4(\mathbb{R} \times [0, T])} \equiv \sup_{\alpha+\beta \leq 4} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]} \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x, t) \right| < +\infty.$$

On introduit l'erreur de troncature:

$$(45) \quad \varepsilon_j^n = \rho_j \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\delta t^2} - \frac{1}{\delta x} \left(\mu_{j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n}{\delta x} - \mu_{j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\delta x} \right),$$

où on a posé

$$u_j^n = u(x_j, t^n).$$

Il est alors facile (mais pénible) de montrer l'existence de deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ ne dépendant que de ρ et μ telles que:

$$(46) \quad \sup_{t^n \geq T, j \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_j^n| \leq C_1 (\delta t^2 + \delta x^2) \|u\|_{C^4(\mathbb{R} \times [0, T])},$$

$$(47) \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\rho_j} \left(\mu_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{\delta x} - \mu_{j-\frac{1}{2}} \frac{u_j^0 - u_{j-1}^0}{\delta x} \right) - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right](x_j) \right| \leq C_2 \delta x^2 \|u_0\|_{C^4(\mathbb{R})}.$$

a - Justifier pourquoi, pour tout entier n , la suite $\varepsilon_h^n = (\varepsilon_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ appartient à l'espace L_h^2 et satisfait:

$$\|\varepsilon_h^n\|_\rho \leq \tilde{C} \sqrt{1+T} \|u\|_{C^4(\mathbb{R} \times [0, T])} (\delta t^2 + \delta x^2).$$

où $\tilde{C} > 0$ ne dépend que de ρ , μ et de la taille du support des données initiales.

b - On introduit l'erreur $e_j^n = u(x_j, t^n) - u_j^n$. Ecrire l'équation reliant la suite e_h^n à la suite ε_h^n .

On dira que le schéma converge en norme $L^\infty(0, T, L^2)$ si:

$$(48) \quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|e_h^n\|_\rho = 0.$$

c - On pose $\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e_h^{n+1} - e_h^n}{\delta t} \right\|_\rho^2 + \frac{1}{2} a_h(e_h^{n+1}, e_h^n)$. Montrer que:

$$(49) \quad (\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq (\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n \|\mathcal{E}_h^k\| \delta t.$$

d - En déduire l'estimation d'erreur:

$$(50) \quad \sup_{t^n \leq T} \|e_h^n\|_\rho \leq \frac{C T}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \delta x^2 \left(\|u_0\|_{C^4(\mathbb{R})} + (1 + \sigma^2) T \sqrt{1 + T} \|u\|_{C^4(\mathbb{R} \times [0, T])} \right).$$

où la constante C ne dépend une fois de plus que des fonctions ρ et μ .