A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Aucun document personnel n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Notations

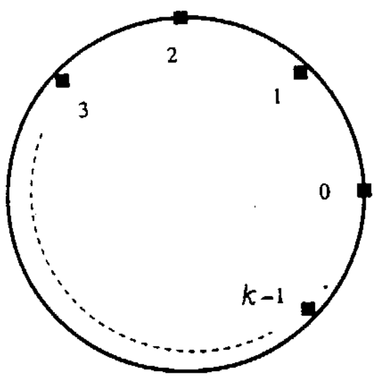
Dans tout le problème les variables aléatoires considérées seront définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 1.

La partie 4 ne dépend pas des 3 parties précédentes.

1 Marche aléatoire sur le cercle S^1

On considère le déplacement d'une particule sur $k \geq 2$ sites du cercle S^1, numérotés en suivant $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.



Tournez la page S.V.P.

Sa dynamique est la suivante : Entre les instants entiers et de façon indépendante, la particule, soit se déplace d'un site dans le sens positif trigonométrique avec probabilité $p \in]0,1[$, soit reste sur place. A l'instant initial $n = 0$, elle occupe le site 0.

Soit Y_n, $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire représentant le numéro du site occupé par la particule au temps n.

1. Exprimer Y_n à l'aide d'une suite de v.a. $(N_i)_{i \geq 1}$ représentant chaque pas. On explicitera la loi des N_i .

2. Montrer que $Y_n, n \in \mathbb{N}$, est une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ et qu'elle est irréductible, c'est-à-dire

   $$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P(Y_n = x) > 0, \forall y \in E, \exists m \in \mathbb{N}, P(Y_{n+m} = y / Y_n = x) > 0.$$

   Donner sa matrice de transition Q.

3. Dans cette question, on suppose que E a pour cardinal 2.

   Montrer qu'alors Q est symétrique et calculer Q^n. On exprimera ses coefficients en fonction du paramètre p_n défini par $p_n = \frac{1}{2}\big(1 - (1-2p)^n\big)$. En déduire le comportement asymptotique de Y_n quand n tend vers l'infini. Quelle est la nature de cette convergence?

4. Dans le cas général $k \geq 2$, montrer l'existence d'une unique probabilité invariante par Q notée μ et l'identifier. On rappelle que μ est caractérisée par le système d'équations:

   $$\forall x \in E, \sum_{y \in E} \mu(\{y\}) Q(y; x) = \mu(\{x\}).$$

   Exhiber la limite quand n tend vers l'infini de

   $$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

   Justifier et interpréter.

5. Calculer la loi de la v.a. T_0 représentant le temps de premier retour au site 0.

2 Marche aléatoire sur $\mathbb{R}$

La particule se déplace maintenant sur $\mathbb{R}$. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ des pas effectués entre deux instants consécutifs $n-1$ et $n, n \in \mathbb{N}^*$ est une suite de v.a. réelles indépendantes centrées. On les suppose aussi uniformément bornées, i.e.

$$\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |X_n| \leq \alpha.$$

Soit $S_n \in \mathbb{R}$ l'emplacement occupé par la particule au temps n, sachant qu'elle est au temps 0 en l'origine :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \quad S_0 = X_0 = 0.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à une filtration que l'on précisera.

2. Soit
$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega, \lim_n S_n(\omega) \text{ existe et est finie}\}$$
et
$$\Omega_2 = \{\omega \in \Omega, \overline{\lim}_n S_n(\omega) = +\infty \text{ et } \underline{\lim}_n S_n(\omega) = -\infty\}.$$
Nous allons montrer dans cette question que $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = 1$.

   (a) Soit $a > 0$ et S_n^a la marche aléatoire S_n arrêtée en a, c'est-à-dire définie par $S_n^a = S_{n \wedge T_a}$ où
   $$T_a = \inf\{m \in \mathbb{N}^*, S_m \geq a\} \quad (\inf \varnothing = +\infty).$$
   Vérifier que T_a est un temps d'arrêt associé à la filtration définie à la question 1. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(|S_n^a|) \leq 2(a + \alpha).$$
   En déduire la convergence p.s. de la suite $(S_n^a)_n$.

   (b) Montrer que
   $$\{\overline{\lim}_n S_n < +\infty\} = \cup_{a \in \mathbb{N}^*} \{T_a = +\infty\}.$$
   En déduire que $\{\overline{\lim}_n S_n < +\infty\}$ est inclus, à un ensemble de P-mesure nulle près, dans Ω_1.

   (c) Montrer de même que $\{\underline{\lim}_n S_n > -\infty\}$ est inclus dans Ω_1 à un ensemble de P-mesure nulle près, et conclure.

3. Montrer, qu'en fait, S_n oscille entre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ soit p.s. soit presque jamais.

4. Dorénavant et jusqu'à la fin de cette partie 2, les v.a. $(X_i)_i$ sont supposées équidistribuées et non triviales ($P(X_i = 0) < 1$). Montrer que l'on ne peut pas avoir $P(\Omega_1) = 1$, et donc que
$$P(\Omega_2) = 1.$$

5. Particularisons encore la loi des v.a. X_i, en la supposant définie par :
$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$
Ainsi la marche aléatoire prend ses valeurs dans le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. Montrer que S_n visite p.s. tout site $b \in \mathbb{Z}$ une infinité de fois. Comment s'appelle cette propriété? En déduire que le temps d'arrêt T_1 défini dans la question 2) ci-dessus est fini p.s..

6. Nous restons sous les hypothèses de la question précédente et allons retrouver par un calcul direct que 0 est un état récurrent. Soit
$$U = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}}$$
le nombre de passages en 0 de la marche aléatoire S_n.

   (a) Calculer $P(S_n = 0)$ et en déduire la valeur exacte de $E(U)$ comme limite de série. En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent du terme général de cette série. En conclure que $E(U) = +\infty$.

(b) Montrer que si les X_i avaient été des v.a. non centrées de loi

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1) \neq \frac{1}{2},$$

on aurait obtenu $E(U) < +\infty$ et on aurait pû en déduire immédiatement que le nombre de passages en 0 de cette marche asymétrique est p.s. fini. Comment s'appelle cette propriété?

(c) Or les v.a. X_i sont centrées ; pourquoi ne peut-on pas déduire directement de $E(U) = +\infty$ que le nombre de passages en 0 de la marche aléatoire S_n est infini? On va donc entreprendre une analyse plus fine.
Soit $\tau_k, k \geq 1$, la famille de v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ définies par

$$\tau_k = \inf\{m \geq 1, \sum_{n=1}^{m} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}} = k\} \quad (\inf \varnothing = +\infty).$$

Que représente τ_k et donner son ensemble de valeurs? Prouver que chaque τ_k est un temps d'arrêt. Montrer que

$$E(U) = 1 + \sum_{k\geq 1} P(\tau_k < +\infty),$$

puis, par récurrence, que $P(\tau_k < +\infty) = P(\tau_1 < +\infty)^k$. Conclure.

3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Nous généralisons dans cette partie l'étude de la partie précédente au cas où les déplacements s'effectuent dans le réseau d-dimensionnel $\mathbb{Z}^d, d > 1$.

Plus précisément, soit $(X_n^j, j = 1, \ldots, d, n \in \mathbf{N}^*)$ une suite de v.a. indépendantes centrées de loi satisfaisant comme à la question 5 de la partie 2

$$P(X_n^j = 1) = P(X_n^j = -1) = \frac{1}{2},$$

et définissons la v.a. à valeurs vectorielles $\bar{X}_n$ par

$$\bar{X}_n = (X_n^1, \ldots, X_n^d).$$

1. Donner la loi exacte de $\bar{X}_1$.

2. Pour $d = 2$, faire un dessin et montrer quel est l'avantage de définir $\bar{X}_1$ comme ci-dessus par rapport à la définition suivante :
$\tilde{X}_1$ est équirépartie sur l'ensemble des valeurs $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$.

3. Interpréter géométriquement l'ensemble des valeurs prises par $\bar{X}_1$ pour $d = 3$.
La suite des pas $(\bar{X}_n)$ permet de définir la marche aléatoire $(\bar{S}_n)_n$ sur $\mathbb{Z}^d$ de façon naturelle comme :

$$\bar{S}_n = \bar{X}_1 + \cdots + \bar{X}_n,\ n \in \mathbf{N}^* \text{ et } \quad \bar{S}_0 = \bar{X}_0 = 0.$$

4. Vérifier que $(\bar{S}_n)_n$ est une chaîne de Markov.

5. Comme dans la question 6 de la partie précédente, on définit le nombre de passages en 0 de la marche aléatoire $\bar{S}_n$ par

$$\bar{U} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\bar{S}_n = 0\}} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{\bar{S}_n = 0\}}.$$

   (a) Calculer $P(\bar{S}_n = 0)$; en déduire la valeur exacte de $E(\bar{U})$, ainsi qu'un équivalent du terme général de cette série.

   (b) En déduire le nombre de passages en 0 de cette marche aléatoire quand la dimension d du réseau est supérieure ou égale à 3. Quel effet a donc un espace de grande dimension sur le comportement asymptotique de $\bar{S}_n$?

   (c) Que faire pour pouvoir conclure quand $d = 2$?

4 Processus de branchement

On étudie dans cette partie l'évolution du nombre aléatoire de particules Z_n en fonction du temps n lorsque celles-ci peuvent se désintégrer selon un shéma décrit ci-dessous.

Au temps 0 une seule particule existe, c'est-à-dire $Z_0 = 1$. Entre les instants $n-1$ et n, chacune des Z_{n-1} particules existantes va se scinder indépendemment des autres en un nombre aléatoire de nouvelles particules, qui vont représenter la $n^{\text{ième}}$ génération (on considère Z_0 comme la génération 0). La probabilité qu'une particule fixée donne naissance à k nouvelles particules au moment de sa scission est de $p_k, k \in \mathbf{N}$.

1. Donner Z_1, puis écrire Z_{n+1} en fonction de $Z_n, n \geq 1$, en introduisant des v.a. que l'on définira.

2. Donner une relation de récurrence permettant de calculer, pour $n \geq 2$, la fonction génératrice G_n de Z_n à partir de la fonction G définie par :

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \, s^k, \quad s \in [0,1].$$

3. On suppose $0 < p_0 < 1$. Interpréter. Montrer qu'alors G est strictement monotone, convexe sur $]0,1[$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette convexité soit stricte.

4. Étudier le comportement asymptotique de la suite x_n représentant la probabilité que la $n^{\text{ième}}$ génération se soit éteinte, soit encore $x_n = P(Z_n = 0)$. On distinguera les cas $m = \sum_{k=0}^{+\infty} k \, p_k \leq 1$ et $m > 1$. Conclure.

5 Marche aléatoire branchante

Dans cette partie l'on évoque une modélisation du phénomène aléatoire comprenant à la fois une dynamique spatiale comme celle étudiée dans la partie 3 et une dynamique de reproduction comme celle décrite dans la partie 4.

Supposons qu'au temps 0 une particule se trouve en l'origine du réseau $\mathbb{Z}^d$. Entre les instants 0 et 1 elle se déplace d'un pas aléatoire de même loi que la v.a. $\bar{X}_1$ décrite dans la partie 3. Entre les instants $n = 1$ et $n = 2$, cette particule va se scinder selon le procédé

Tournez la page S.V.P.

décrit dans la partie 4, et les nouvelles particules ainsi formées, situées à l'emplacement de leur particule mère, vont évoluer indépendemment. Au temps $n = 2$, on choisit au hasard une des particules existantes et celle-ci va se déplacer sur $\mathbb{Z}^d$ entre les instants $n = 2$ et $n = 3$ d'un pas aléatoire de même loi que $\bar{X}_1$. Au temps $n = 3$, on choisit au hasard une des particules existantes et celle-ci va se scinder entre les instants $n = 3$ et $n = 4$ selon le procédé décrit dans la partie 4. Ainsi de suite, on alterne une dynamique de déplacement spatial et une dynamique de reproduction.

1. Proposer une description de ce processus au temps n par une v.a. μ_n à valeurs dans un espace de mesures que l'on précisera.

2. Expliciter la probabilité de transition entre 2 instants entiers consécutifs de ce processus à valeurs mesures.