A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Les parties I et II sont indépendantes

Notations:

- Dans tout le problème, sauf mention explicite du contraire, les variables aléatoires considérées seront définies sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $\mathbb{E}(X)$.

- Soit (E, d) un espace métrique.

L'ensemble $C_b(E)$ désignera l'ensemble des fonctions continues bornées sur E.

On notera dans tout le problème par $\mathcal{E}$ la tribu borélienne de E (pour la topologie induite par la distance).

- Pour α un réel strictement positif, on désignera par $N(0, \alpha)$ la loi normale centrée et de variance α.

- Pour a et b deux réels, on note par $a \wedge b$ le minimum entre a et b.

Rappels:

Le problème portera sur des théorèmes limites, plus particulièrement sur des résultats de convergence en loi.

On rappelle qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X)) \ , \ n \to +\infty.$$

On a les deux caractérisations suivantes:

1) (Théorème de Paul Lévy) Pour chaque n, $X_n = (X_n^1, ..., X_n^d)$. La suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers $X = (X^1, ..., X^d)$ dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si pour tout vecteur $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d)$ de réels,

$$\phi_{X_n}(\lambda) \to \phi_X(\lambda) \ , \ n \to +\infty,$$

où $\phi_{X_n}(\lambda) = E(e^{i(\lambda_1 X_n^1 + \lambda_2 X_n^2 + ... + \lambda_d X_n^d)})$ et $\phi_X(\lambda) = E(e^{i(\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + ... + \lambda_d X^d)})$.

2) La suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers X dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\forall f \in Lip_1(\mathbb{R}^d), \quad E(f(X_n)) \to E(f(X)) \ , \ n \to +\infty,$$

Tournez la page S.V.P.

où $Lip_1(\mathbb{R}^d) = \{f$ lipschitzienne bornée sur $\mathbb{R}^d$ avec $\sup_x |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq 1\}$.
($|.|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$).

PARTIE I: Convergence en loi de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

A - Résultats préliminaires

1) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, convergeant dans L^2 vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrer qu'alors, cette suite converge en loi vers 0.

2) Montrer que si la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers 0, alors elle converge en probabilité vers 0. (On pourra introduire la fonction $x \mapsto \frac{|x|}{1+|x|}$).

3) Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, convergeant en loi respectivement vers X et Y quand n tend vers l'infini. On suppose de plus que pour chaque n, les deux variables aléatoires X_n et Y_n sont indépendantes.

Montrer que la suite $(X_n, Y_n)_n$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{2d}$ converge alors en loi quand n tend vers l'infini vers un couple de variables aléatoires (X', Y'), où X' et Y' sont indépendantes, X' a même loi que X et Y' a même loi que Y.

4) Qu'en déduire sur le comportement asymptotique (en loi) de la suite de variables $(X_n + Y_n)_n$ quand n tend vers l'infini?

5) On considère une variable aléatoire X réelle non nulle, telle que la loi de X est égale à la loi de $(-X)$.

Donner un exemple de telle variable aléatoire.

En posant $X_n = X$ pour tout n et $Y_n = (-1)^n X$, montrer que la propriété prouvée à la question précédente n'est pas forcément réalisée dans le cas où pour certaines valeurs de n, les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

6) Montrer le même résultat qu'à la question I-A-4, si on ne suppose pas que X_n et Y_n sont indépendantes pour chaque n, mais avec l'hypothèse supplémentaire que $Y = 0$.

7) Montrer que si $(\lambda_n)_n$ est une suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel λ et si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers X, alors la suite $(\lambda_n X_n)_n$ converge en loi vers λX.

B - Une marche aléatoire

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles, indépendantes et équidistribuées, d'espérance nulle et de variance égale à 1.

1) On définit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $S_0 = 0$ et pour chaque entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Rappeler le comportement asymptotique (en loi) de la variable aléatoire $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ quand n tend vers l'infini.

2) On fixe $t > 0$ et on définit pour tout entier $n \geq 1$

$$Y_t^n = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}$$

où $[nt]$ désigne la partie entière de nt.

On considère alors pour $t \in I\!R_+$ la variable aléatoire réelle Z_t^n définie par

$$Z_t^n = Y_t^n + \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} X_{[nt]+1} = Y_t^n + A_t^n.$$

Donner l'allure du graphe de la fonction Z^n, pour un ω fixé de Ω. (On pourra par exemple tracer son graphe pour $0 \leq t \leq \frac{4}{n}$).

On remarquera que pour chaque $\omega \in \Omega$, cette fonction est continue de $I\!R_+$ à valeurs réelles.

3) Dans cette question, on fixe $t > 0$.

Montrer que A_t^n converge dans L^2 vers 0 quand n tend vers l'infini.

Montrer que Y_t^n converge en loi vers une variable aléatoire de loi $N(0,t)$ quand n tend vers l'infini.

En déduire que Z_t^n converge en loi vers une variable aléatoire de loi $N(0,t)$ quand n tend vers l'infini.

4) On fixe maintenant p nombres réels $t_1 < t_2 < ... < t_p$.

a) Montrer que pour chaque j fixé dans $\{2, ..., p\}$, la suite de variables aléatoires $(Y_{t_j}^n - Y_{t_{j-1}}^n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $N(0, t_j - t_{j-1})$.

b) En déduire que $(Y_{t_1}^n, Y_{t_2}^n - Y_{t_1}^n, ..., Y_{t_p}^n - Y_{t_{p-1}}^n)$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, ..., \bar{Y}_p)$, où les variables aléatoires $(\bar{Y}_j, 1 \leq j \leq p)$ sont indépendantes, et la loi de $\bar{Y}_j$ est $N(0, t_j - t_{j-1})$ pour $j \geq 2$ et la loi de $\bar{Y}_1$ est $N(0, t_1)$.

c) En déduire que $(Y_{t_1}^n, Y_{t_2}^n, ..., Y_{t_p}^n)$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers $(W_{t_1}, W_{t_2}, ...W_{t_p})$, où la loi de W_{t_i} est $N(0, t_i)$ pour chaque i et les variables $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_p} - W_{t_{p-1}}$ sont indépendantes.

e) Qu'en conclure au sujet du comportement asymptotique de $(Z_{t_1}^n, Z_{t_2}^n, ..., Z_{t_p}^n)$?

C - Contrôle des accroissements de la marche aléatoire

Dans cette partie, on suppose que $E((X_1)^4) = a < +\infty$.

1) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$,

$$E\left((\sum_{i=1}^{p} X_i)^4 \right) = pa + 3p(p-1)\,.$$

2) Montrer que pour tous s, t fixés dans $I\!R_+$, avec $s \geq \frac{1}{n}$, on a

$$E((Y_{t+s}^n - Y_t^n)^4) \leq C_1 s^2$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de a.

3) Montrer que $\forall t \in I\!R_+$,

$$E((A_t^n)^4) \leq \frac{a}{n^2}$$

puis que $\forall t, s \in I\!R_+$,

$$E((Z_{t+s}^n - Z_t^n)^4) \leq C_2 s^2$$

où C_2 est une constante qui ne dépend que de a.

On pourra distinguer le cas $s \geq \frac{1}{n}$ du cas $\frac{1}{n} > s$. Dans cette dernière situation, on pourra donner explicitement les différentes valeurs possibles de $[n(t+s)]$ en fonction de $[nt]$.

II - Probabilité sur un espace métrique

On considère maintenant un espace métrique E muni d'une distance d et on note $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne (pour la topologie induite par la distance).

A - Distance d'un point à un fermé

Soit F un fermé de E. Pour $x \in E$, on définit la distance de x au fermé F par

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y).$$

1) Montrer que

$$x \in F \Longleftrightarrow d(x,F) = 0.$$

2) Montrer que la fonction $g : x \mapsto d(x,F)$ est lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}_+$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : x \mapsto 1 - 1 \wedge (ng(x))$$

est lipschitzienne et bornée.

3) Montrer que pour tout x fixé dans E, la suite $f_n(x)$ décroît vers $\mathbf{1}_F(x)$, où $\mathbf{1}_F(x)$ vaut 1 si $x \in F$ et 0 sinon.

4) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n = \{x \in E, d(x,F) < \frac{1}{n}\}$. Justifier le fait que O_n est un ouvert de E et montrer que

$$F = \cap_n O_n.$$

B - caractérisation d'une probabilité sur un espace métrique E

Considérons P une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

1) Montrer que si $(A_n)_n$ est une famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints de $\mathcal{E}$, alors

$$P(\cup_{n>n_0} A_n) \to 0 \text{ quand } n_0 \text{ tend vers l'infini.}$$

2) On veut montrer que pour tout $A \in \mathcal{E}$,

$$P(A) = \inf\{P(O), O \text{ ouvert}, A \subset O\} = \sup\{P(F), F \text{ fermé}, F \subset A\}. \tag{1}$$

Pour cela on considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{E}, \inf\{P(O), O \text{ ouvert}, A \subset O\} = \sup\{P(F), F \text{ fermé}, F \subset A\} \right\}.$$

2-a) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.

2-b) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie.

2-c) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable d'événements disjoints deux à deux.

2-d) Montrer que $\mathcal{A}$ contient les ensembles fermés de E.

2-e) En déduire qu'on a (1) pour tout $A \in \mathcal{E}$.

3) En déduire que toute probabilité P sur un espace métrique est caractérisée par les $\int_E f dP$, où f décrit l'ensemble des fonctions lipschitziennes bornées.

Partie III: Convergence étroite sur un espace métrique

On considère (E, d) un espace métrique, $(P_n)_n$ une suite de probabilités sur E, et P une probabilité sur E.

On dit que la suite $(P_n)_n$ converge étroitement vers P si

$$\forall f \in C_b(E), \lim_{n \to +\infty} \int_E f dP_n = \int_E f dP.$$

1) Soit $(P_n)_n$ une suite de probabilités sur l'espace métrique E.

Montrer que si la suite $(P_n)_n$ converge étroitement vers P, alors pour tout fermé F de E,

$$\limsup_n P_n(F) \leq P(F). \tag{2}$$

(On pourra utiliser la question A-3)

2) Montrer que la propriété (2) est équivalente au fait que pour tout ouvert O de E,

$$\liminf_n P_n(O) \geq P(O). \tag{3}$$

3) On suppose maintenant satisfaites les propriétés de convergence (2) et (3) et on voudrait en déduire que la suite $(P_n)_n$ converge étroitement vers P.

3-a) Montrer que pour toute fonction fonction f continue bornée sur E, comprise entre 0 et 1,

$$\int_E f dP = \int_0^1 P(f \geq \alpha) d\alpha = \int_0^1 P(f > \alpha) d\alpha.$$

3-b) En déduire que $\int_E f dP_n$ converge vers $\int_E f dP$ quand n tend vers l'infini.

3-c) - Conclure.

IV - La marche aléatoire en tant que processus

On considère dans cette partie l'espace métrique C égal à l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme, notée $\|.\|_\infty$. L'espace C est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(C)$.

Pour chaque $t \in [0, 1]$, on appelle projection au temps t et on note p_t l'application

$$p_t : C \to \mathbb{R} \ ; \ p_t(x) = x(t).$$

1) Montrer que pour tous réels fixés $t_1, ..., t_d$, l'application de C dans $\mathbb{R}^d$ qui à x associe $(x(t_1), ..., x(t_d))$ est mesurable.

De même, montrer que $x \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ est mesurable.

Les variables aléatoires X à valeurs dans C muni de sa tribu borélienne seront donc des fonctions aléatoires continues, qu'on appellera des processus. Pour $t \in [0,1]$, on notera par $X_t = p_t(X)$ la valeur du processus X au temps t. Chaque variable X_t est donc une variable aléatoire à valeurs réelles.

Soit $(X^n)_n$ une suite de processus à valeurs dans C. Alors la suite $(X^n)_n$ converge en loi vers X si la suite des lois P_n des X^n converge étroitement vers la loi P de X.

2) Montrer que si $(X^n)_n$ converge en loi vers X, alors , pour tous réels fixés $t_1, ..., t_d$, $(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_d})$ converge en loi vers $(X_{t_1}, ..., X_{t_d})$.

3) On considère la suite de probabilités $P_n = \delta_{x_n}$ sur C où

$$\begin{aligned} x_n(t) &= nt \text{ si } \quad 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ &= 2 - nt \text{ si } \frac{1}{n} \le t \le \frac{2}{n} \\ &= 0 \text{ si } \quad \frac{2}{n} \le t \le 1 \,. \end{aligned}$$

3-a) Soit $P = \delta_0$, où 0 est la fonction de C identiquement nulle. Montrer que la suite de probabilités $(P_n)_n$ ne converge pas étroitement vers P.

3-b) Soit une suite $(X^n)_n$ de processus à valeurs dans C telle que pour chaque n, la loi de X^n est P_n. De même, soit X un processus de loi P. Montrer que pour tous réels fixés $t_1, ..., t_d$, $(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_d})$ converge en loi vers $(X_{t_1}, ..., X_{t_d})$.

On admettra le théorème fondamental suivant:

Théorème: *Soit $(X^n)_n$ une suite de processus à valeurs dans C, nuls au temps 0. Si*

1) il existe trois réels strictement positifs α, β, K, indépendants de n et tels que

$$\sup_n E(|X^n_{t+s} - X^n_t|^\alpha) \le K s^{1+\beta} \ , \ \forall t, s \in [0,1], \ t + s \le 1,$$

2) Pour tous réels fixés $t_1, ..., t_d$, $(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_d})$ converge en loi,
alors il existe un processus X à valeurs dans C, tel que la suite $(X^n)_n$ converge en loi vers X.

4) Déduire de ce qui précède que si $E((X_1)^4) < +\infty$, la suite de processus $(Z^n)_n$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers un processus Z tel que pour tous $t > s$ dans $[0,1]$, Z_s et $Z_t - Z_s$ sont indépendants. Caractériser la loi de $Z_t - Z_s$.

Reconnaissez-vous le processus Z?

5) Que dire du comportement en loi, quand n tend vers l'infini, de la variable aléatoire $\sup_{t\in[0,1]} |Z^n_t|$?