B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Pour m, n et s trois entiers naturels non nuls, on note $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{s\times m}$ et $\mathbb{R}^{s\times n}$ les espaces de vecteurs à respectivement m, n, $s\times m$ et $s\times n$ composantes réelles, et on se donne une norme sur chacun de ces espaces. Cependant, on utilise pour toutes ces normes et les normes subordonnées associées la même notation $\|.\|$. Plus précisément, si on désigne par $\mathcal{M}(\mu,\nu)$ l'espace des matrices à coefficients réels à μ lignes et ν colonnes et si $M\in\mathcal{M}(\mu,\nu)$, alors on note

$$\|M\| = \sup_{u\in\mathbb{R}^\nu,\ u\neq 0} \frac{\|Mu\|}{\|u\|}.$$

Soient x_0 et $X > x_0$ deux réels fixés. On considère le système algébro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(x) &= f(y(x),z(x)) \\ 0 &= g(y(x)) \end{cases} ,\ x\in[x_0,X], \tag{1}$$

où f et g sont des fonctions de classe C^k, $k\geq 2$, respectivement de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

Dans tout le problème, on note $g_y(\bar y)\in\mathcal{M}(n,m)$ l'application linéaire tangente à $y\mapsto g(y)$ évaluée au point $\bar y$ et $f_z(\bar y,\bar z)\in\mathcal{M}(m,n)$ l'application linéaire tangente à $z\mapsto f(\bar y,z)$ évaluée au point $(\bar y,\bar z)$ et on fait l'hypothèse suivante :

$$(H_1)\ :\ \forall (y,z)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\ \det(g_y(y)f_z(y,z))\neq 0.$$

On suppose en outre qu'il existe une fonction G de classe C^{k-1} de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout y de $\mathbb{R}^m$, $z=G(y)$ soit l'unique solution de l'équation $g_y(y)f(y,z)=0$, c'est-à-dire

$$(H_2)\ :\ \forall y\in\mathbb{R}^m,\ \exists!\, z=G(y)\in\mathbb{R}^n, g_y(y)f(y,z)=0.$$

Tournez la page S.V.P.

On dit que le couple $(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ est *consistant* s'il satisfait les équations :

$$\begin{aligned} g(y) &= 0, & (2)\\ g_y(y)f(y,z) &= 0. & (3)\end{aligned}$$

On note enfin $\mathcal{V}$ l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{y \in \mathbb{R}^m,\ g(y) = 0\},$$

et on suppose que $\mathcal{V}$ est borné.

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence d'une classe de méthodes de Runge-Kutta, les méthodes de Radau IIA.

Soit donc $\mathcal{R}$ une méthode de Runge-Kutta à $s \geq 2$ étapes internes. $\mathcal{R}$ est caractérisée par une matrice de coefficients $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{s\times s}$, dont on suppose ici que

$$(H_3)\ :\ \det(A) \neq 0,$$

et un vecteur de poids $b = (b_i) \in \mathbb{R}^s$. Étant donnée une approximation (y,z) de la solution exacte $(y(x),z(x))$ au point x, on peut calculer une approximation (y^h,z^h) de la solution au point $x+h$ par les formules

$$\begin{aligned} Y_i &= y + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(Y_j,Z_j),\ i = 1,\ldots,s, & (4)\\ 0 &= g(Y_i),\ \ i = 1,\ldots,s, & (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^h &= y + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(Y_j,Z_j), & (6)\\ z^h &= \rho z + \sum_{j=1}^{s} w_j Z_j, & (7)\end{aligned}$$

où $\rho = (1 - b^T A^{-1} e)$ est supposé tel que $|\rho| < 1$, $e = (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^s$ et $w^T = b^T A^{-1}$.

On définit de plus le vecteur c de $\mathbb{R}^s$ par $c = Ae$.

Il sera montré dans la seconde partie du problème que sous certaines conditions qui seront précisées, le système (4,5) possède une solution unique.

Pour les méthodes de Radau IIA, la dernière ligne de la matrice A se confond avec b^T. On sera donc amené dans certaines questions à faire l'hypothèse suivante :

$$(H_4) \ : \ e_s^T A = b^T,$$

où $e_s = (0, \dots ,0,1)^T \in \mathbb{R}^s$.

Partie I

1. Montrer que si $(y(x),z(x))$ est solution de classe C^1 de (1), alors $(y(x_0),z(x_0))$ est consistant et $(y(x),z(x))$ est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) que l'on écrira sans recourir à G.
2. Réciproquement, montrer que toute solution de classe C^1 $(y(x),z(x))$ sur $[x_0,X]$ du système (EDO) dont le couple de valeurs initiales (au point x_0) est consistant, est solution de (1).
3. Montrer que (1) possède une solution globale de classe C^1 unique pour tout couple consistant de valeurs initiales.
4. Montrer que si f est de la forme

$$f(y,z) = f_0(y) + f_z(y)z,$$

l'hypothèse (H_2) est automatiquement vérifiée, dès lors que (H_1) est vérifiée.
5. On considère l'exemple d'un système mécanique de coordonnées $q(x) \in \mathbb{R}^a$, $a \in \mathbb{N}^*$ et de vitesse $u(x) = \frac{dq(x)}{dx}$, x représentant ici le temps. On note $T(q,u) \in \mathbb{R}$ sa fonction énergie cinétique dont on suppose qu'elle est de classe C^{k+2}, $k \geq 2$ et que

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\nabla_u T(q,u)\right)$$

est définie positive pour tout $(q,u) \in \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^a$. On suppose en outre que le système est soumis à la contrainte cinématique suivante

$$\Omega(q)u + \omega(q) = 0,$$

où $\Omega \in \mathcal{M}(b,a)$ et $\omega \in \mathbb{R}^b$ sont des fonctions de la variable q de classe C^k, Ω étant supposée de rang plein en lignes pour tout $q \in \mathbb{R}^a$. Les

Tournez la page S.V.P.

équations de Lagrange pour ce système s'écrivent alors

$$\frac{d}{dx}\left(\nabla_u T(q(x),u(x))\right) - \nabla_q T(q(x),u(x)) = Q(q(x),u(x)) + \Omega^T(q(x))\lambda(x)$$

où Q est là encore une fonction de classe C^k et où λ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^b$. Expliciter les équations vérifiées par ce système et vérifier qu'elles sont de la forme (1) et satisfont (H_1) et (H_2) mais que l'ensemble $\mathcal{V}$ associé n'est pas borné. On peut cependant montrer (on ne le demande pas) que pour tout couple de valeurs initiales consistant la solution de ce système est bornée. Conclure comme dans la question 3.

Partie II

On considère le système non-linéaire (S) suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_i &=& \eta + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(Y_j,Z_j),\ i=1,\ldots,s, \\ 0 &=& g(Y_i),\ i=1,\ldots,s, \end{array}\right.$$

où l'on suppose que η est une fonction bornée de h telle que

$$\exists C>0, \exists h_0>0, \forall 0\le h\le h_0, \|g(\eta)\| \le Ch^2.$$

1. On considère l'homotopie

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_i(\tau) &=& \eta + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(Y_j,Z_j) + (\tau-1)h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(\eta,G(\eta)),\ i=1,\ldots,s, \\ 0 &=& g(Y_i) + (\tau-1)g(\eta),\ i=1,\ldots,s, \end{array}\right. \tag{8}$$

(a) Montrer que le système (8) possède une solution pour $\tau=0$.

(b) En utilisant les notations

$$(A\otimes N) = \begin{bmatrix} a_{11}N & \ldots & a_{1s}N \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1}N & \ldots & a_{ss}N \end{bmatrix}$$

définie pour une matrice N carrée quelconque,

$$\{f_y\} = \begin{bmatrix} f_y(Y_1(\tau),Z_1(\tau)) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & \ldots & \ldots\ 0 & f_y(Y_s(\tau),Z_s(\tau)) \end{bmatrix},$$

$$\{f_z\} = \begin{bmatrix} f_z(Y_1(\tau),Z_1(\tau)) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & f_z(Y_s(\tau),Z_s(\tau)) \end{bmatrix},$$

$$\{g_y\} = \begin{bmatrix} g_y(Y_1(\tau)) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & g_y(Y_s(\tau)) \end{bmatrix},$$

montrer que les fonctions

$$Y(\tau) = \begin{bmatrix} Y_1(\tau) \\ \vdots \\ Y_s(\tau) \end{bmatrix} \text{ et } Z(\tau) = \begin{bmatrix} Z_1(\tau) \\ \vdots \\ Z_s(\tau) \end{bmatrix}$$

sont solutions d'un système différentiel de la forme

8)

$$\mathcal{K}(Y(\tau),Z(\tau))\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} Y(\tau) \\ Z(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} f(\eta,G(\eta)) \\ \vdots \\ h\sum_{j=1}^{s} a_{s,j} f(\eta,G(\eta)) \\ g_y(Y_1(\tau))(\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} f(\eta,G(\eta))) + \frac{1}{h}g(\eta) \\ \vdots \\ g_y(Y_s(\tau))(\sum_{j=1}^{s} a_{s,j} f(\eta,G(\eta))) + \frac{1}{h}g(\eta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

où l'on précisera la forme de $\mathcal{K}$.

(c) Montrer que le produit tensoriel $A \otimes N$ est inversible si et seulement si N l'est.

(d) En déduire que si les (Y_i,Z_i), $i = 1,\dots,s$ sont dans un voisinage

$$\mathcal{B}_d^h = \{(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ ; \|y - \eta\| \leq d,\ \|z - G(\eta)\| \leq d\}$$

Tournez la page S.V.P.

de $(\eta,G(\eta))$ où d est un réel positif suffisamment petit, alors $\mathcal{K}$ peut s'écrire en fonction de $g_y(\eta)f_z(\eta,G(\eta))$. Montrer qu'il existe un $d_0 > 0$ et un $h_1 > 0$ tels que pour

$$(Y_i,Z_i) \in \left(\bigcup_{d \leq d_0, h \leq h_1} \mathcal{B}_d^h \right), \; i = 1,\ldots,s,$$

la matrice $\mathcal{K}$ est inversible d'inverse uniformément borné.

(e) En déduire que le système différentiel (9) possède une solution locale.

(f) Montrer que cette solution peut être étendue à tout l'intervalle [0,1] pour $h \leq h_2$, h_2 suffisamment petit.

(g) En déduire que le système (S) possède une solution.

(h) Montrer que f est Lipschitzienne sur $\left(\bigcup_{d \leq d_0, h \leq h_2} \mathcal{B}_d^h\right)$ et prouver alors l'unicité locale de cette solution de (S).

2. Parallèlement au système (S), on considère le système perturbé (SP)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{Y}_i &=& \hat{\eta} + h\sum_{j=1}^s a_{i,j} f(\hat{Y}_j,\hat{Z}_j) + h\delta_i, \; i = 1,\ldots,s, \\ 0 &=& g(\hat{Y}_i) + \theta_i, \; i = 1,\ldots,s, \end{array} \right.$$

dont on suppose qu'il possède une solution et pour lequel on fait l'hypothèse que les δ_i, les θ_i pour $i = 1,\ldots,s$ et $\hat{\eta}$ sont des fonctions de h telles que :

$$\forall\, 0 \leq h \leq h_0, \qquad \begin{array}{l} \|\hat{\eta} - \eta\| \leq Ch^2, \\ \|\delta\| \leq Ch, \\ \|\theta\| \leq Ch^2. \end{array}$$

(a) Montrer qu'il existe une constante réelle $C_1 > 0$ et un pas $h_3 > 0$ tels que pour tout $i = 1,\ldots,s$ et pour tout $h \leq h_3$ on ait :

$$\begin{array}{lcl} \|\hat{Y}_i - Y_i\| &\leq& C_1 \left(\|\hat{\eta} - \eta\| + h\|\delta\| + \|\theta\|\right), \\ \|\hat{Z}_i - Z_i\| &\leq& \dfrac{C_1}{h} \left(\|g_y(\eta)(\hat{\eta} - \eta)\| + h\|\hat{\eta} - \eta\| + h\|\delta\| + \|\theta\|\right). \end{array}$$

On considérera l'homotopie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{Y}_i &=& \eta + h\sum_{j=1}^s a_{i,j} f(\hat{Y}_j,\hat{Z}_j) + (1-\tau)(\hat{\eta} - \eta + h\delta_i), \; i = 1,\ldots,s, \\ 0 &=& g(\hat{Y}_i) + (1-\tau)\theta_i, \; i = 1,\ldots,s, \end{array} \right.$$

et on fera un raisonnement similaire à celui de la question 1.

(b) Montrer que si $(\eta,\hat{\eta}) \in \mathcal{V}^2$, le terme $\|g_y(\eta)(\hat{\eta}-\eta)\|$ peut être omis.

Partie III

Soient $p \geq q \geq 1$ deux entiers naturels. Dans cette partie, on suppose que (1) possède une solution $(y(x),z(x))$ de classe C^k, k étant ici supposé supérieur ou égal à $p+1$. Soit (y^h,z^h) l'approximation numérique fournie par la méthode de Runge-Kutta $\mathcal{R}$ en partant d'un point $(y(x),z(x))$ de la solution. Pour h suffisamment petit, les valeurs (y^h,z^h) sont définies de manière unique par les équations :

$$\begin{aligned}
Y_i &= y(x) + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(Y_j,Z_j),\ i=1,\ldots,s,\\
0 &= g(Y_i),\ i=1,\ldots,s,\\
y^h &= y(x) + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(Y_j,Z_j),\\
z^h &= \rho z(x) + \sum_{j=1}^{s} w_j Z_j.
\end{aligned}$$

On définit les erreurs locales, respectivement $\delta y_h(x)$ et $\delta z_h(x)$ en les composantes respectivement différentielle et algébrique par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta y_h(x) &:= y^h - y(x+h),\\
\delta z_h(x) &:= z^h - z(x+h).
\end{aligned}$$

Pour $(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, on considère en outre les endomorphismes de $\mathbb{R}^m$ suivants :

$$\begin{aligned}
Q = Q(y,z) &:= f_z(y,z)\left(g_y(y)f_z(y,z)\right)^{-1} g_y(y),\\
P = P(y,z) &:= \mathrm{Id} - Q(y,z),
\end{aligned}$$

où Id est l'application identité de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même.

1. Montrer que P et Q sont les projecteurs respectivement sur $T_y\mathcal{V}$ -espace tangent à $\mathcal{V}$ au point y- parallèlement a $\mathrm{Im}(f_z(y,z))$ et sur $\mathrm{Im}(f_z(y,z))$ parallèlement a $T_y\mathcal{V}$.

2. On suppose que les coefficients de $\mathcal{R}$ satisfont les relations

$$\sum_{j=1}^{s} a_{i,j}(c_j)^{k-1} = \frac{1}{k}(c_i)^k,\ i = 1,\ldots,s,\ k = 1,\ldots,q, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j(c_j)^{k-1} = \frac{1}{k},\ k = 1,\ldots,p. \qquad (11)$$

(a) En considérant le système perturbé (SP) avec $\hat{Y}_i = y(x + c_i h)$ et $\hat{Z}_i = z(x + c_i h)$ montrer qu'il existe une constante réelle strictement positive C et un pas h_0 réel strictement positif tels que pour tout $0 \leq h \leq h_0$ et tout $i = 1,\ldots,s$, on ait :

$$\|Y_i - y(x + c_i h)\| \leq C h^{q+1},$$
$$\|Z_i - z(x + c_i h)\| \leq C h^{q}.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante réelle strictement positive C_1 et un pas h_1 réel strictement positif tels que pour tout $0 \leq h \leq h_1$ on ait :

$$\|\delta y_h(x)\| \leq C_1 h^{q+1},$$
$$\|\delta z_h(x)\| \leq C_1 h^{q},$$
$$\|P(y(x),z(x))\delta y_h(x)\| \leq C h^{\min(p+1,q+2)}.$$

(c) On suppose que $\mathcal{R}$ satisfait l'hypothèse (H_4). Montrer qu'on a alors $g(y_1) = 0$. En déduire que les estimations de la question 2. concernant $\delta y_h(x)$ deviennent :

$$\|\delta y_h(x)\| \leq C_2 h^{\min(p+1,q+2)}.$$

Partie IV

Soient (P_n) et (Q_n) deux suites (indicées par n) de fonctions de $h \in \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}(m,m)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n^2 = P_n,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n + Q_n = Id,$$
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists h_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall 0 \leq h \leq h_0, \forall n \in \mathbb{N}, \|P_{n+1} - P_n\| \leq Ch.$$

On considère alors une suite (α_n) de $(\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ pour laquelle on fait l'hypothèse suivante :

$$\forall\, 0 \le h \le h_0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \|\alpha_{n+1} - P_n\alpha_n - \rho Q_n\alpha_n\| \le Ch\|\alpha_n\|,$$

avec, on le rappelle, $|\rho| < 1$.

1. A l'aide d'un contre-exemple en dimension $m = 2$, montrer que la suite $(\|P_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement bornée. Montrer cependant que pour tout réel $L > 0$, il existe une constante $\hat{C}$ telle que :

$$\forall\, 0 \le h \le h_0, \forall\, n \in \mathbb{N}, nh \le L, \|P_n\| \le \hat{C}.$$

2. On note $u_n = \|P_n\alpha_n\|$ et $v_n = \|Q_n\alpha_n\|$. Montrer qu'il existe une constante réelle positive $\tilde{C}$ telle que

$$\forall\, 0 \le h \le h_0, \forall\, n \in \mathbb{N}, nh \le L, \quad \begin{aligned} u_{n+1} &\le (1 + \tilde{C}h)u_n + \tilde{C}hv_n, \\ v_{n+1} &\le \tilde{C}hu_n + (\rho + \tilde{C}h)v_n. \end{aligned}$$

3. Déduire des deux questions précédentes la majoration :

$$\exists \bar{C} \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall\, 0 \le h \le h_0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, nh \le L,$$
$$\|\alpha_n\| \le \bar{C}(\|P_0\alpha_0\| + (|\rho|^n + h)\|Q_0\alpha_0\|).$$

Partie V

Soit $r \ge 2$ un entier naturel. On suppose que (1) possède une solution $(y(x),z(x))$ de classe C^k associée au couple consistant de valeurs initiales (y_0,z_0), avec $z_0 = G(y_0)$, k étant ici supposé supérieur ou égal à $r + 1$. On suppose par ailleurs qu'il existe des constantes C_0 et h_0 réelles strictement positives telles que pour tout x de $[x_0,X]$ et tout $0 \le h \le h_0$, on ait :

$$\|\delta y_h(x)\| \le C_0 h^r,$$
$$\|P(y(x),z(x))\delta y_h(x)\| \le C_0 h^{r+1}.$$

Pour tout N entier non nul, et tout pas h non nul tels que $Nh \le (X - x_0)$, on considère $y_0^h = y_0$, y_1^h, ..., y_n^h, ..., y_N^h les approximations de $y(x)$ aux points x_0, $x_1 = x_0 + h$, ..., $x_n = x_0 + nh$, ..., $x_N = x_0 + Nh$ obtenues par application des formules (4, 5, 6). L'objectif de cette partie est d'obtenir des majorations de l'erreur $\|y_n^h - y(x_n)\|$.

Soient de manière similaire les approximations y_n^l définies pour $0 \leq l \leq n \leq N$ par $y_l^l = y(x_l)$ et la formule de récurrence pour $l \leq n \leq N-1$

$$\begin{aligned} Y_i^l &= y_n^l + h \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(Y_j^l, Z_j^l),\ i = 1, \dots, s, && (12)\\ 0 &= g(Y_i^l),\ i = 1, \dots, s, && (13)\\ y_{n+1}^l &= y_n^l + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(Y_j^l, Z_j^l). && (14) \end{aligned}$$

1. Justifier, en supposant dans cette question (H_4), que pour h suffisamment petit, les y_n^l sont bien définis.
2. On suppose qu'il existe une constante réelle $C_1 > 0$ et un pas h_1 tels que pour $Nh \leq (X - x_0)$ et $0 \leq h \leq h_1$, on ait :

$$\begin{aligned} \forall\, 0 \leq l \leq n \leq N, &\quad \|y_n^l - y(x_n)\| \leq C_1 h, && (15)\\ \forall\, 1 \leq l+1 \leq n \leq N, &\quad \|y_n^{l+1} - y_n^l\| \leq C_1 h^2, && (16)\\ \forall\, 0 \leq l \leq n \leq N, &\quad \|g(y_n^l)\| \leq C_1 h^2. && (17) \end{aligned}$$

   (a) Montrer qu'il existe une constante C et un pas H, tels que pour $Nh \leq (X - x_0)$, $h \leq H$ et pour $1 \leq l+1 \leq n \leq N-1$ on ait :

$$\|(y_{n+1}^{l+1} - y_{n+1}^l) - (P_n^l + \rho Q_n^l)(y_n^{l+1} - y_n^l)\| \leq Ch\|y_n^{l+1} - y_n^l\|,$$

   où $P_n^l = P(y_n^l, G(y_n^l))$ et $Q_n^l = Q(y_n^l, G(y_n^l))$.

   (b) En déduire une majoration de $\|y_n^h - y(x_n)\|$.

   (c) En supposant (H_4), justifier les hypothèses (15, 16, 17) par récurrence.

Partie VI

On fait dans cette partie les mêmes hypothèses que dans la partie V. On suppose en outre que (H_4) est vérifiée. On considère $z_0^h = z_0$, z_1^h, ..., z_n^h, ..., z_N^h les approximations de $z(x)$ aux points x_0, $x_1 = x_0 + h$, ..., $x_n = x_0 + nh$, ..., $x_N = x_0 + Nh$ obtenues par application de la formule

$$z_{n+1} = \rho z_n + \sum_{j=1}^{s} w_j Z_j \qquad (18)$$

et on suppose en outre que pour $0 \leq h \leq h_0$, on a :

$$\|\delta z_h(x)\| \leq C_0 h^r.$$

1. Montrer que l'erreur $z_n - z(x_n)$ est de nature locale, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de l'approximation y_n de $y(x)$ et de $\delta z_h(x)$ (on réécrira la formule (18) en tenant compte de (H_4)).
2. En déduire une estimation de $\|z_n - z(x_n)\|$.
3. Par construction, la méthode de Radau IIA à s étapes, $s \geq 2$, satisfait les relations (10) et (11). En déduire une minoration des ordres de convergence des composantes différentielle y et algébrique z.
4. En fait, on peut démontrer que pour la méthode de Radau IIA à s étapes, $s \geq 2$, on a pour tout $h \leq h_0$:

$$\begin{aligned} \|\delta y_h(x)\| &\leq C_0 h^{2s}, \\ \|\delta z_h(x)\| &\leq C_0 h^{s+1}. \end{aligned}$$

   Donner les ordres de convergence correspondants.

On peut montrer (on ne le demande pas!) que les ordres de convergence obtenus dans cette dernière question sont optimaux.