A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

PRÉLIMINAIRES

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par la relation:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

et vérifie de plus: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, pour tout $x > 1$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi gamma de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ si X a pour densité $\dfrac{1}{\Gamma(a)b^a}x^{a-1}e^{-x/b}1_{\{x>0\}}$. On notera: $X \sim \gamma(a, b)$. Lorsque $b = 1$ la loi $\gamma(a, 1)$ est notée $\gamma(a)$.

Une v.a. X suit la loi gaussienne réduite et centrée si X a pour densité: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

INDICATION

La partie 2 (sauf la question 6)) est indépendante de la partie 1.
La partie 3 ne dépend pas des deux sections précédentes.

Tournez la page S.V.P.

1. ETUDE DES LOIS GAMMA

1) Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r. dans la suite) de loi $\gamma(a,b)$, montrer que $\lambda X \sim \gamma(a, \lambda b)$.
2) Soit X de loi gaussienne réduite et centrée, montrer que $X^2/2 \sim \gamma(1/2)$. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
3) Soit X de loi $\gamma(a)$. Montrer que pour tout réel $p \geq 1, X$ appartient à L^p. Calculer explicitement $E[X^k]$ pour tout entier $k \geq 1$.
4) a) Soient X et X' deux v.a.r. indépendantes, $X \sim \gamma(a), X' \sim \gamma(a')$. Montrer que $X + X' \sim \gamma(a + a')$.
b) Si $X_1, X_2, ..., X_n$ désignent n v.a.r., indépendantes, équidistribuées, de loi gaussienne réduite et centrée, vérifier que $X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ suit une loi gamma que l'on caractérisera.
5) Soient X et X' deux v.a.r. indépendantes, $X \sim \gamma(a), X' \sim \gamma(a')$.
a) Montrer que les deux v.a.r. $X + X'$ et $\dfrac{X}{X+X'}$ sont indépendantes. En déduire l'égalité:

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a'-1}du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a')}{\Gamma(a+a')}, \; a, a' > 0.$$

b) Calculer la densité conditionnelle de X sachant $X + X'$.
c) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre 1 (i.e. $E[N_t] = t$). On désigne par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses temps de saut. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Déterminer la loi de T_1 sachant T_{n+1}. Calculer ensuite $E[T_1|\mathcal{F}]$ où $\mathcal{F}$ désigne la tribu engendrée par la suite de v.a.r. $(T_k)_{k\geq n+1}$.
6) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs, convergente de limite $a > 0$. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r., X_n de loi $\gamma(a_n)$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Identifier la limite.

2. LOI GAUSSIENNE INVERSE GÉNÉRALISÉE, LIEN AVEC LES LOIS GAMMA

Pour tout réel λ, soit K_λ la fonction:

$$K_\lambda(a) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\exp\{-\frac{a}{2}(x+\frac{1}{x})\}dx; \quad a > 0.$$

1) Vérifier que cette fonction est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer: $K_\lambda(a) = K_{-\lambda}(a); a > 0$.
3) On pose:

$$\mu(\lambda, a, b)(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda/2} \frac{1}{2K_\lambda(\sqrt{ab})} x^{\lambda-1}\exp\{-\frac{1}{2}(ax+\frac{b}{x})\}\; 1_{\{x>0\}}; \quad a > 0, b > 0.$$

Montrer que pour tout $a > 0, b > 0$ la fonction $x \to \mu(\lambda, a, b)(x)$ est une densité de probabilité.
On dira dans la suite qu'une v.a. X de densité $\mu(\lambda, a, b)(.)$ suit la loi gaussienne inverse généralisée de paramètres λ, a, b. On notera pour abréger: $X \sim GIG(\lambda, a, b)$.
4) Soit $X \sim GIG(\lambda, a, b)$. Montrer que $1/X$ suit une loi gaussienne inverse généralisée.
5) Soit $X \sim GIG(\lambda, a, b)$. Montrer que la transformée de Laplace de X vaut:

$$E[e^{-uX}] = \left(1 + \frac{2u}{a}\right)^{-\lambda/2} \frac{K_\lambda(\sqrt{(a+2u)b})}{K_\lambda(\sqrt{ab})}; \quad u \geq 0.$$

6) Soient X et Y deux v.a. indépendantes, $X \sim GIG(-\lambda, a, a)$ et $Y \sim \gamma(\lambda, 2/a)$, avec $a > 0$. Montrer que X a même loi que $\dfrac{1}{X+Y}$
7) a) On pose $\varphi(a) = \sqrt{a}K_{1/2}(a); a > 0$. Montrer:

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\{-\frac{1}{2}(y + \frac{a^2}{y})\}dy; \quad a > 0.$$

En déduire: $\lim\limits_{a \to 0_+} \varphi(a) = \sqrt{\pi/2}$.
Calculer la dérivée de φ. En effectuant le changement de variable $y = a/x$, montrer que φ vérifie: $\varphi'(a) = -\varphi(a)$. En déduire : $K_{1/2}(a) = (\pi/2a)^{1/2}e^{-a}, a > 0$,
b) Soient $a, b, c > 0$. Montrer:

$$GIG(-1/2, a, (b+c)^2) = GIG(-1/2, a, b^2) * GIG(-1/2, a, c^2), \tag{1}$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

3. TEMPS DE PASSAGE DE MARCHES ALÉATOIRES.

1) On commence par établir une version "faible" du théorème d'arrêt. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt fini.
On suppose de plus que T est un temps d'arrêt borné par un entier K. Montrer:

$$E[M_n 1_{\{T=n\}}] = E[M_K 1_{\{T=n\}}], \quad 0 \leq n \leq K.$$

En déduire $E[M_T] = E[M_0] = E[M_K]$.

Dans cette section 3, $(X_n)_{n\geq 0}$ désigne une marche aléatoire de paramètre p, avec $1/2 < p < 1$. On rappelle que

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k; \quad n \geq 0,$$

où ϵ_0 est à valeur dans l'ensemble des entiers relatifs, les v.a.r. $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ sont indépendantes et:

$$P(\epsilon_k = 1) = p, \quad P(\epsilon_k = -1) = 1 - p; \quad k \geq 1.$$

2) Soient $0 < u < 1, v = 1/u$.
Montrer que l'équation du second degré (par rapport à la variable a): $pa^2 - va + 1 - p = 0$ admet deux racines réelles notées $\theta_-(u)$ et $\theta_+(u)$ telles que $0 < \theta_-(u) < 1 < \theta_+(u)$.
3) On introduit: $Y_n = a^{X_n} u^n, n \geq 0$ avec $a = \theta_-(u)$ ou $\theta_+(u)$. Montrer que $(Y_n; n \geq 0)$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ où $\mathcal{F}_n$ désigne la tribu engendrée par les variables $X_0, X_1, ..., X_n$.
4) Pour tout $x \geq 0$, on désigne par T_x le premier temps de passage en x: $T_x = \inf\{n \geq 0; X_n = x\}$ avec la convention: $\inf \emptyset = +\infty$.
On suppose: $X_0 = i$.
a) Montrer:

$$E[u^{T_x} 1_{\{T_x < \infty\}}] = \theta_+(u)^{i-x}; \text{ si } x \geq i,$$

$$E[u^{T_x} 1_{\{T_x < \infty\}}] = \theta_-(u)^{i-x}; \text{ si } x \leq i.$$

b) Démontrer que $P(T_x < \infty) = 1$, lorsque $x \geq i$ et

$$P(T_x < \infty) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-x}, \quad \text{si } x < i.$$

c) On suppose $i = 0$, i.e. $X_0 = 0$. Soit $S = \max_{n\geq 0}(-X_n) + 1$. Démontrer que S suit une loi géométrique de paramètre $\lambda = 2 - 1/p$ (i.e. $P(S = k) = \lambda(1-\lambda)^{k-1}; k \geq 1$).

4. PREUVE PROBABILISTE DE L'IDENTITÉ (1).

Soit α un réel strictement positif et N un entier tel que $1 + \alpha/N < 2$.
On pose:

$$p^{(N)} = \frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha}{N}).$$

Dans la suite du problème $(X_k^{(N)})_{k\geq 0}$ désigne une marche aléatoire de paramètre $p^{(N)}$, et issue de 0 (i.e. $X_0^{(N)} = 0$).
On notera $T_x^{(N)}$ le premier temps où ce processus atteint x.
1) Soit x un réel positif.
a) Montrer:

$$\theta_+^{(N)}(e^{-\lambda/N^2}) = 1 + (\sqrt{2\lambda + \alpha^2} - \alpha)\frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}); \qquad N \to +\infty.$$

b) Montrer que lorsque N tend vers l'infini,

$$\frac{T_{[Nx]}^{(N)}}{N^2} \text{ converge en loi vers une v.a.r. de loi } GIG(-1/2, \alpha^2, x^2),$$

$[x]$ désignant la partie entière de x.

2) Pour tout $x > 0$, $\xi^{(N)}(x)$ désigne une v.a.r. telle que

$$\xi^{(N)}(x) \text{ a même loi que } \frac{T_{[Nx]}^{(N)}}{N^2}.$$

Soient x_1, x_2 deux rationnels positifs s'écrivant sous la forme: $x_1 = k_1/N$ et $x_2 = k_2/N$. On suppose de plus que les deux v.a.r. $\xi^{(N)}(x_1)$ et $\xi^{(N)}(x_2)$ sont indépendantes. Montrer que $\xi^{(N)}(x_1) + \xi^{(N)}(x_2)$ a même loi que $\xi^{(N)}(x_1 + x_2)$.

3) Soient $(Z_n)_{n\geq 0}$ et $(Z'_n)_{n\geq 0}$ deux suites de v.a.r., telles que $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers Z, $(Z'_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers Z' et pour tout n les deux v.a.r. Z_n et Z'_n sont indépendantes. Montrer que $Z_n + Z'_n$ converge en loi, lorsque n tend vers l'infini.

4) En déduire l'identité (1).