C3/2000
Maths

C 30121 J. 0945

3e ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 heures

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME D'ANALYSE

Le but de ce problème est d'établir, pour l'équation aux dérivées partielles parabolique non linéaire suivante, d'inconnue la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad \partial_t u - \partial_x^2 u = f(x,u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \ u \text{ 1-périodique en } x$$

un résultat d'existence d'une classe de solutions particulières, que nous appellerons *fronts périodiques.* Un front périodique est une solution $\Phi(t,x)$ de (1) de la forme

$$\Phi(t,x) = \frac{t}{T} + \varphi(t,x)$$

où le réel T est strictement positif, et la fonction φ est T-périodique en t et 1-périodique en x. La fonction f vérifie les hypothèses suivantes.

- **H1** f est 1-périodique en toutes ses variables, i.e: si $e \in \mathbb{R}^2$ est à coordonnées entières, on a: $f\big((x,u)+e\big) = f(x,u)$.
- **H2** f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

A partir de la partie **IV** elle vérifiera de plus l'hypothèse

- **H3** Il existe $m \geq 0$ tel que $f(x,u) \geq m$, pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^2$.

Notations et conventions

- On note $\mathbb{R}_+$ l'intervalle $[0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]0,+\infty[$.
- Soit C_{per} le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues 1-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Il est muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. Pour $k \geq 1$, on note C_{per}^k l'espace des fonctions de C_{per} qui sont de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

On introduit ensuite sur C_{per} la norme

$$\forall u \in C_{per}, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\int_0^1 u^2(x)\ dx}.$$

On note L_{per}^2 le complété de C_{per} pour $\|.\|_2$, à savoir l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-periodiques et dont les restrictions à $[0,1]$ forment l'espace $L^2[0,1]$". La norme reste donnée par la même expression que dans C_{per}.

- Pour toute fonction $u \in L_{per}^2$, on posera $< u >= \displaystyle\int_0^1 u(x)\ dx$.

• Si I est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ et E un espace de Banach, on note $C(I, E)$ l'espace des fonctions continues de I dans E.

• Une fonction $u(t,x)$ continue en ses deux variables, à valeurs réelles et 1-périodique en x sera ainsi vue comme un élément de $C([0,T], C_{per})$. On notera alors par $u(t)$ - quand aucune ambiguïté n'est possible - la fonction $u(t,.)$. On notera en particulier

$$< u(t) >= \int_0^1 u(t,x)\, dx.$$

• Pour une fonction $u(t,x)$ on notera $\partial_t u$ et $\partial_x u$ ses dérivées partielles respectivement par rapport à t et x - quand elles existent. Plus généralement on notera, pour $k \geq 1$, lorsque cette quantité existe, $\partial_x^k u$ - resp. $\partial_t^m u$ - la dérivée d'ordre k - resp. m - de u par rapport à x - resp. t.

• Par *solution de $(\mathcal{E})$ on entend* une fonction $u(t,x)$ telle que:

(i). $u \in C(\mathbb{R}_+, L^2_{per})$,

(ii). $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ et vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

• Enfin, on dira que $u \in C(\mathbb{R}_+, L^2_{per})$ vérifie $u(0,x) = u_0(x)$ avec $u_0 \in L^2_{per}$ si et seulement si $\lim\limits_{t\to 0} \|u(t) - u_0\|_2 = 0$.

I

Le but de cette partie est de résoudre l'équation de la chaleur homogène sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Soit $u_0 \in L^2_{per}$ et considérons l'équation

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ u \text{ 1-périodique en } x \\ &u(0,x) = u_0(x) \end{aligned}$$

1. Pour tout entier n notons e_n la fonction donnée par $e_n(x) = e^{-2i\pi nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que tout v_0 de L^2_{per} est limite dans L^2_{per} de sa série de Fourier, i.e. $v_0 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} v_{0,n} e_n$ avec $v_{0,n} = \int_0^1 v_0(x) e^{2i\pi nx}\, dx$.

a. Soit $v_0 \in L^2_{per} \cap C^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{dv_0}{dx} = -2i\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} n v_{0,n} e_n$.

b. Soit $v_0 \in L^2_{per} \cap C^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k v_0}{dx^k}$ est la somme de sa série de Fourier, que l'on explicitera.

c. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+$ et $v \in C(I, L^2_{per})$. Soit, pour tout $t \in I$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} v_n(t) e_n$ le développement en série de Fourier de $v(t)$. Montrer que l'application $t \in I \mapsto v_n(t)$ est continue.

d. Supposons I ouvert et supposons $v \in C^\infty(I \times \mathbb{R})$. Montrer que l'application $t \in I \mapsto v_n(t)$ est C^∞ sur I et expliciter la série de Fourier de $\partial_t^m v$, pour tout $m \geq 1$.

Tournez la page S.V.P.

2. Notons $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{0,n} e_n$ le développement en série de Fourier de la donnée initiale u_0 du problème (1).

a. Supposons que (1) admette une solution u et soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t) e_n$ le développement en série de Fourier de $u(t)$. Calculer u_n en fonction de $u_{0,n}$ et n et montrer qu'alors la fonction $u(t,.)$ définie par la série de Fourier précédente est bien solution de (1). On la note $\mathcal{S}_0(t)u_0$.

b. Etablir que

$$\forall t \geq 0, \qquad \begin{aligned} &\|\mathcal{S}_0(t)u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2 \\ &\|\mathcal{S}_0(t)u_0 - < \mathcal{S}_0(t)u_0 > \|_2 \leq e^{-4\pi^2 t}\|u_0\|_2 \end{aligned}$$

et que, pour tout $k \in I\!N^*$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_{k,\varepsilon}$ telle que

$$\forall t \geq \varepsilon, \quad \|\partial_x^k \mathcal{S}_0(t)u_0\|_2 \leq C_{k,\varepsilon} e^{-2\pi^2 t}\|u_0\|_2.$$

c. Montrer que l'application $t \mapsto \mathcal{S}_0(t)u_0$ est continûment dérivable de $I\!R_+^*$ vers L^2_{per} et que, si $u_0 \in C^2(I\!R)$, alors on a

$$\forall t > 0, \quad \partial_t(\mathcal{S}_0(t)u_0) = \mathcal{S}_0(t)\frac{d^2u_0}{dx^2}.$$

II

Le but de cette partie est de résoudre l'équation de la chaleur inhomogène sur $I\!R_+ \times I\!R$. Soit $u_0 \in L^2_{per}$, $g \in C(I\!R_+, L^2_{per})$ et considérons l'équation

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\partial_t u - \partial_x^2 u = g(t,x), \qquad (t,x) \in I\!R_+^* \times I\!R, \ u \text{ 1-périodique en } x \\ &u(0,x) = u_0(x) \end{aligned}$$

1. Supposons l'existence d'une solution u pour (2). Pour tout $T > 0$ et tout $t \in [0,T[$ notons $v(t) = \mathcal{S}_0(T-t)u(t)$.

a. Montrer que $v \in C([0,T], L^2_{per})$ et que v est continûment dérivable de $]0,T[$ vers L^2_{per}.

b. Montrer que $\partial_t v(t) = \mathcal{S}_0(T-t)g(t)$.

2. En déduire que (2) admet une unique solution donnée par

$$(3) \qquad u(t) = \mathcal{S}_0(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{S}_0(t-s)g(s)\ ds.$$

3. On suppose $g \leq 0$. Soit $p \in C^1(I\!R, I\!R)$ telle que $p(u) = 0$ si $u \leq 0$, $p(u) > 0$ si $u > 0$ et $p'(u) \geq 0$ pour tout $u \in I\!R$.

a. Donner un exemple d'une telle fonction p.

b. Notons $P(u) = \int_0^u p(v)\ dv$. Montrer que

$$\forall t > 0,\ \ \frac{d}{dt} < P(u) > (t) + \int_0^1 p'(u(t,x))(\partial_x u(t,x))^2\ dx \leq 0.$$

c. En déduire que $u \leq 0$.

4. Soient $u_{01} \leq u_{02}$ dans L^2_{per}, soit $g_1 \leq g_2$ dans $C(\mathbb{R}_+, L^2_{per})$ et soient u_i, $i \in \{1,2\}$ les solutions de (2) avec $u(0,.) = u_{0i}$, $g = g_i$. Montrer que $u_1 \leq u_2$.

III

On s'intéresse dans cette partie au problème de Cauchy

$$(4) \qquad \begin{array}{l} \partial_t u - \partial_x^2 u = f(x,u), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ u \text{ 1-périodique en } x \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array}$$

La fonction f vérifie les hypothèses **H1** et **H2**; en particulier f est bornée sur $\mathbb{R}^2$ ainsi que toutes ses dérivées partielles. On notera

$$M = \|f\|_\infty; \quad L = \|\partial_x f\|_\infty + \|\partial_u f\|_\infty.$$

1. Soit $u_0 \in L^2_{per}$. Montrer que, si u est solution de (4), alors on a

$$(5) \qquad u(t) = \mathcal{S}_0(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{S}_0(t-s)f(.,u(s))\ ds.$$

2. Soit, pour $u \in L^2_{per}$, $\mathcal{G}(u)(t)$ le second membre de (5). Une solution de (5) vérifie ainsi $u = \mathcal{G}(u)$. Pour $T > 0$ on munit $C([0,T], L^2_{per})$ de la norme

$$\forall u \in C([0,T], L^2_{per}), \qquad N_T(u) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_2.$$

a. Montrer l'existence de $T > 0$ indépendant de u_0 tel que $\mathcal{G}$ soit une contraction stricte sur $C([0,T], L^2_{per})$ pour N_T.

b. En déduire l'existence d'un unique $u \in C(\mathbb{R}_+, L^2_{per})$ vérifiant (5). On notera $u(t) = \mathcal{S}_f(t)u_0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$ et $t \geq 2\varepsilon$.

a. Montrer qu'il existe $C_\varepsilon > 0$ indépendant de $\|u_0\|_2$ tel que

$$(6) \quad \|\partial_x u(t)\|_2 \leq C_\varepsilon(\|u_0\|_2 e^{-2\pi^2 t} + 1) + L \int_{t-\varepsilon}^t e^{-4\pi^2(t-s)} \|\partial_x u(s)\|_2\ ds.$$

On pourra décomposer l'intégrale de la formule (5) en une partie sur $[0, t-\varepsilon]$ et une partie sur $[t-\varepsilon, t]$. On traitera la première partie à l'aide de **I-2.b** et la seconde partie en la dérivant par rapport à x.

Tournez la page S.V.P.

b. Donner une borne uniforme en t pour $\|\partial_x u(t)\|_2$ pour $t \geq 2\varepsilon$, puis pour $\|u(t) - < u(t) > \|_\infty$.

4. Pour $k \geq 2$ et $t \geq 2\varepsilon$, donner une borne uniforme en t pour $\|\partial_x^k u(t)\|_2$. En déduire que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.

5. Soit $g(x,u)$ vérifiant les hypothèses **H1** et **H2**, telle que $f \leq g$, et soit $v_0 \in L^2_{per}$ telle que $v_0 \geq u_0$; montrer que $\mathcal{S}_f(t)u_0 \leq \mathcal{S}_g(t)v_0$. On écrira une équation linéaire à coefficients variables sur $w := \mathcal{S}_f(t)u_0 - \mathcal{S}_g(t)v_0$, puis on s'inspirera de la question **II-3.**

IV

L'objet de cette partie est de montrer l'existence de fronts périodiques. Soit Y le sous-espace de L^2_{per} des fonctions u telles $< u >= 0$. Soit $\mathcal{F}$ l'application de $\mathbb{R}_+ \times Y$ dans lui-même donnée par

$$\mathcal{F}(T,\xi) = \left(\int_0^T < f(x, \mathcal{S}_f(t)\xi) > \ dt, \quad \mathcal{S}_f(T)\xi - < \mathcal{S}_f(T)\xi > \right).$$

Jusqu'à la fin du problème on suppose que f vérifie les hypothèses **H1**, **H2** *et* **H3**.

1. Soit $(T,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times Y$. Montrer que, si $\mathcal{F}(T,\xi) = (1,\xi)$, alors $\mathcal{S}_f(t)\xi$ est un front périodique.

2. Soit $(T,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times Y$ une solution de

$$\mathcal{F}(T,\xi) = (1,\xi). \tag{7}$$

Montrer que $\dfrac{1}{M} \leq T \leq \dfrac{1}{m}$, et déduire de **III-3.b.** que $\|\xi\|_\infty \leq CM$ - les notations sont celles de **III-3.**

3. On suppose f constante sur $\mathbb{R}^2$.

a. Résoudre l'équation (7).

b. Pour tout $T > 0$, soit A_T l'application de Y vers lui-même donnée par $A_T\xi = \mathcal{S}_f(T)\xi - < \mathcal{S}_f(T)\xi > -\xi$. Montrer que A_T est un isomorphisme de Y.

4. Disons qu'une application d'un ouvert d'un espace de Banach E dans lui-même est *compacte* si elle transforme les bornés en ensembles d'adhérence compacte. On donne le théorème suivant - de Leray-Schauder -:
Soit Ω un ouvert de E et F une application continue de $[0,1] \times E$ vers E, telle que:

(i). $F(0,.) = 0$,

(ii). pour tout $\sigma \in [0,1]$ l'application $F(\sigma,.)$ est compacte,

(iii). pour tout $\sigma \in [0,1]$, tout point fixe éventuel de $F(\sigma,.)$ est dans Ω.

Alors $F(1,.)$ admet un point fixe dans Ω.

En considérant la famille d'applications $\sigma \mapsto 1 - \sigma + \sigma f$, et à l'aide de la question **IV-3-b**, montrer l'existence d'une solution pour (7) et, partant, l'existence d'un front périodique pour $(\mathcal{E})$.

V

Soit $T > 0$ et soit $a \in C([0,T], C_{per}) \cap C^\infty([0,T] \times I\!R)$; notons $\alpha = \|a(t,x)\|_\infty$. **Soit $u_0 \in C^1_{per}$ une fonction positive.** Une adaptation immédiate - et qu'on ne demande pas - des questions **III-2.** à **III-5.** donne l'existence d'un unique $u \in C([0,T], C^1_{per})$ solution de

$$(8) \qquad \begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u + a(t,x)u &= 0 \quad (t,x) \in I\!R_+ \times I\!R \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Dans toute cette partie on pourra utiliser l'expression suivante de $\mathcal{S}_0(t)u_0$:

$$\mathcal{S}_0(t)u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$$

1. On note $\underline{u}(t,x) = \dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$

a. Donner une équation aux dérivées partielles vérifiée par $\underline{u}$ et calculer $\underline{u}(0,x)$.

b. En s'inspirant de la question **II-3.**, montrer que la solution $u(t,x)$ de (8) vérifie, pour tout $t \geq 0$: $u(t,x) \geq \underline{u}(t,x)$.

2. Etablir l'existence de $C_T > 0$, indépendant de u_0, tel que, pour tout $t \in [\frac{T}{2}, T]$, on ait: $u(t,x) \geq C_T \min(1, \dfrac{\|u_0\|_\infty}{\|u_0'\|_\infty})\|u_0\|_\infty$.

3. Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{T}{2}]$, déterminer une fonction $C_T(\varepsilon, \|u_0\|_\infty, \|u_0'\|_\infty)$ telle que:

(i). pour tout $\varepsilon_0 > 0$, la fonction $(\varepsilon, u_1, u_2) \in [\varepsilon_0, +\infty[\times I\!R^2_+ \mapsto C(\varepsilon, u_1, u_2)$ est bornée sur tout compact et minorée par une constante strictement positive;

(ii). $\forall t \in [\varepsilon, T]$, on a $u(t,x) \geq C_T(\varepsilon, \|u_0\|_\infty, \|u_0'\|_\infty)\|u\|_{L^\infty([0,T]\times I\!R)}$.

VI

Le problème se termine par un résultat d'unicité. Soient $\Phi_i(t,x) = \dfrac{t}{T_i} + \varphi_i(t,x)$, $i \in \{1,2\}$ deux fronts périodiques.

1. Montrer l'existence de $t_1 < t_2$ tels que $\Phi_1(t_1,x) \leq \Phi_2(0,x) \leq \Phi_1(t_2,x)$ et tels qu'il existe de plus $x_0 \in I\!R$ pour lequel $\Phi_1(t_1,x_0) = \Phi_2(0,x_0)$.

2. Déduire de **III-5.** que $T_1 = T_2$.

3. Conclure à l'aide de **V-3.** que $\Phi_1(t+t_1,x) = \Phi_2(t,x)$.

Les fronts périodiques mis en évidence sont représentatifs du comportement de *toutes* les solutions de $(\mathcal{E})$: il est en effet possible de montrer, pour tout $u_0 \in L^2_{per}$, l'existence de $\tau(u_0) \in I\!R$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\mathcal{S}_f(t)u_0 - \Phi(t+\tau(u_0),.)\|_\infty = 0.$$

FIN